СТЕНГАЗЕТА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

В истории черпаем мы мудрость, в поэзии — остроумие, в математике — проницательность.

Ф. Бэкон

МАТЕМАТИКА

№ 17
ДЕКАБРЬ
2009

Наш сюжет будет разворачиваться на обычном листке клетчатой бумаги.

Линии, идущие по сторонам клеток, образуют сетку, а вершины клеток — узлы этой сетки. Нарисуем на листе многоугольник с вершинами в узлах (рис. 1) и найдем его площадь. Искать ее можно по-разному. Например, можно разрезать многоугольник на достаточно простые фигуры, найти их площади и сложить.

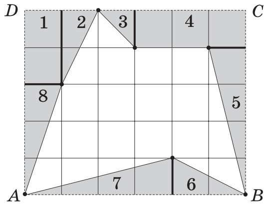

Рис. 1

Но тут нас ждет много хлопот (попробуйте!). Давайте «Схитрим»: вычислим площадь заштрихованной фигуры, которая «дополняет» наш многоугольник до прямоугольника $ABCD$, и вычтем ее из площади прямоугольника. Заштрихованная фигура легко разбивается на прямоугольники и прямоугольные треугольники, и ее площадь вычисляется без усилий.

Итак, хотя многоугольник и выглядел достаточно просто, для вычисления его площади нам пришлось изрядно потрудиться. А если бы многоугольник выглядел более причудливо? Оказывается, площади многоугольников, вершины которых расположены в узлах

Упражнение 1. Проверьте формулу Пика для многоугольника на рисунке 1.

Упражнение 2. Проверьте формулу Пика для фигур на рисунке 3.

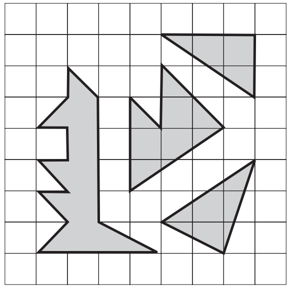

Рис. 3

Вы только что убедились в том, что формула Пика верна для всех рассмотренных примеров.

Докажем!

Обозначим через S_M площадь многоугольника M с вершинами в узлах, а через Π_M — величину $B_M+\frac{\Gamma_M}{2}-1$, где B_M — число узлов внутри M, а Γ_M — число узлов на границе. Тогда формулу Пика можно записать в виде

$$S_M=\Pi_M.$$

Доказательство формулы разобъем на несколько шагов.

Геометрия

Поэтому вклад каждого из этих узлов в Π_M равен 0,5 а в $\Pi_{M_1}+\Pi_{M_2}$ — единице. Значит, суммарный вклад узлов A и B в Π_M равен 1, что на 1 меньше, чем их вклад в $\Pi_{M_1}+\Pi_{M_2}$. Но $\Pi_M=B_M+\frac{\Gamma_M}{2}-1$, а

$$\Pi_{M_1}+\Pi_{M_2}=\left(B_{M_1}+\frac{\Gamma_{M_1}}{2}-1\right)+\left(B_{M_2}+\frac{\Gamma_{M_2}}{2}-1\right),$$

Из общего «вклада» всех узлов Π_M вычитается 1, а из $\Pi_{M_1}+\Pi_{M_2}$ вычитается 2, и это компенсирует разницу вкладов узлов A и B! Итак,

$$\Pi_M=\Pi_{M_1}+\Pi_{M_2}.$$

Шаг 2. Если многоугольник M с вершинами в узлах сетки разрезан на два многоугольника M_1 и M_2 (тоже с вершинами в узлах) и формула верна для каких-то двух из многоугольников M, M_1, M_2, то она верна и для третьего многоугольника.

Пусть, например, она верна для M_1 и M_2, то есть $S_{M_1}=\Pi_{M_1}$, $S_{M_2}=\Pi_{M_2}$. Тогда (по первому шагу) $S_M=S_{M_1}+S_{M_2}=\Pi_{M_1}+\Pi_{M_2}$, но (по первому шагу) последнее выражение равно Π_M, а равенство $S_M=\Pi_M$ и есть формула Пика.

Шаг 3. Докажем формулу Пика для прямоугольного треугольника с вершинами в узлах сетки и катетами, лежащими на линиях сетки.

Треугольник ABC достроим до прямоугольника $ABCD$ (рис. 5). Для прямоугольников формула Пика верна: $S_{ABCD}=\Pi_{ABCD}$. Согласно первому шагу $\Pi_{ABCD}=\Pi_{ABC}+\Pi_{ACD}$, $\Pi_{ABC}=\Pi_{ACD}$, так что $\Pi_{ABCD}=2\Pi_{ABC}$. Но $S_{ABCD}=2S_{ABC}$. Поэтоливо? Оказывается, площади многоугольников, вершины которых расположены в узлах сетки, можно вычислять гораздо проще: есть формула, связывающая их площадь с количеством узлов, лежащих внутри и на границе многоугольника. Эта замечательная и простая формула называется формулой Пика.

Связь между площадью фигуры и количеством узлов, попавших в эту фигуру, особенно ясно видна в случае прямоугольника.

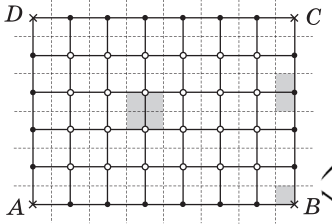

Рис. 2

Пусть $ABCD$ — прямоугольник с вершинами в узлах и сторонами, идущими по линиям сетки (рис. 2).

Обозначим через B количество узлов, лежащих внутри прямоугольника, а через Г — количество узлов на его границе. Сместим сетку на полклетки вправо и полклетки вниз. Тогда территорию прямоугольника можно «распределить» между узлами следующим образом: каждый из B узлов «контролирует» целую клетку смещенной сетки, каждый из $\Gamma - 4$ граничных неугловых узла — половину клетки, а каждая из угловых точек — четверть клетки. Поэтому площадь прямоугольника S равна

$$S = B + \frac{\Gamma - 4}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = B + \frac{\Gamma}{2} - 1.$$

Итак, для прямоугольников с вершинами в узлах и сторонами, идущими по линиям сетки, мы установили формулу $S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1.$

Оказывается, эта формула верна не только для прямоугольников, но и для произвольных многоугольников с вершинами в узлах сетки! Это и есть формула Пика.

Геометрия клетчатой бумаги

Формула Пика

Шаг 1. Если многоугольник M с вершинами в узлах сетки разрезан на 2 многоугольника M_1 и M_2, также имеющих вершины только в узлах сетки, то $П_M = П_{M_1} + П_{M_2}$.

Пусть многоугольник M разрезан на многоугольники M_1 и M_2 с вершинами в узлах отрезком AB (рис. 4). Все узлы, кроме тех, которые попадают на отрезок AB, дают одинаковый вклад в левую и правую части формулы. Рассмотрим узлы, лежащие на отрезке AB.

Если такой узел лежит между A и B (например, C), то для многоугольника M он внутренний, а для многоугольников M_1 и M_2 — граничный. Поэтому его вклад в $П_M$ равен 1, а в каждое из выражений $П_{M_1}$ и $П_{M_2}$ — по 0,5, то есть вклады такого узла в $П_M$ и $П_{M_1} + П_{M_2}$ равны!

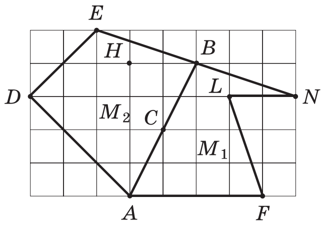

Рис. 4

Наконец, рассмотрим узлы A и B. Они граничные как для M, так и для M_1, M_2. Значит, формула Пика верна. $S_{ABCD} = П_{ABCD}$. Согласно первому шагу $П_{ABCD} = П_{ABC} + П_{ACD}$, $П_{ABC} = П_{ACD}$, так что $П_{ABCD} = 2П_{ABC}$. Но $S_{ABCD} = 2S_{ABC}$. Поэтому $S_{ABC} = П_{ABC}$.

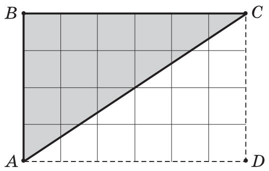

Рис. 5

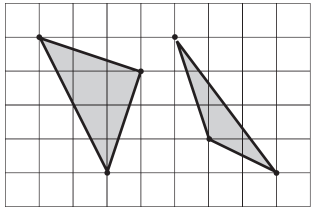

Рис. 6

Шаг 4. Формула Пика верна для произвольного треугольника с вершинами в узлах сетки.

Не будем доказывать это утверждение, но, рассмотрев рисунок 6, легко понять: любой такой треугольник можно получить, «отрезав» от некоторого прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки, несколько прямоугольников и прямоугольных треугольников с катетами на линиях сетки. А так как формула Пика верна для прямоугольников и прямоугольных треугольников, то (вспомним шаг 2) она верна и для исходного треугольника.

Мы доказали, что если многоугольник можно разрезать на треугольники с вершинами в узлах сетки, то для него верна формула Пика.

На прощание попробуйте вычислить площади многоугольников с рисунка 7, используя формулу Пика. Правда ведь, легко получается!

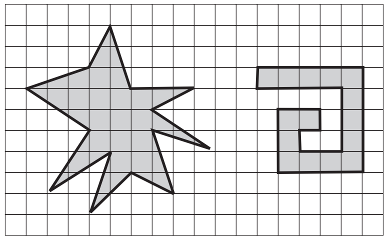

Рис. 7

Материал подготовили ***Н. Жарковская, Е. Рисс.***
Художник ***В. Солдатенко***