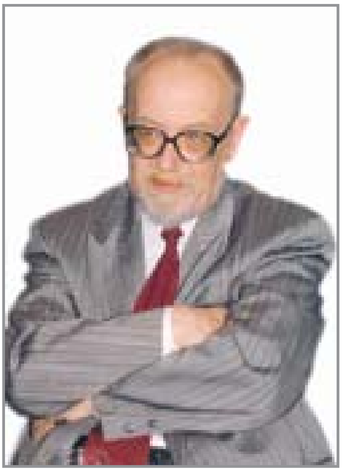
#2

15—30 апреля 2006 г.

Электронный информационный спутник газеты «Математика»

Памяти В.В. Фирсова



Ушел из жизни выдающийся ученый, замечательный человек Виктор Васильевич Фирсов.

Виктор Васильевич был и останется для всех, кто его знал, великим Педагогом и Учителем. Вся его профессиональная деятельность связана с образованием: образованием детей — одаренных и не очень; образованием педагогов и молодых ученых.

Им была разработана и предложена новая парадигма математического образования, в основе которой лежит выделение базового компонента (ядра) содержания и базового уровня требований. Эта же идея была положена в основу предложенного им нового подхода к нормированию содержания общего образования, что позволило связать идею стандартизации с идеей вариативности.

Его идея — «единая и многообразная» система образования, получившая не только научно-методическое, но и практическое воплощение, до сих пор некоторыми работниками российского образования расценивается как остроумный, но неразрешимый парадокс.

Виктор Васильевич внес большой вклад в разработку основ построения базисного учебного плана, федеральных и региональных образовательных стандартов, в разработку и введение в практику работы школы технологии достижения требований стандартов.

«Никогда и ничего не просите!.. И в особенности у тех, кто сильнее вас. Сами предложат и сами все дадут!» — это о жизни Виктора Васильевича Фирсова. Человек очень добрый, готовый помочь обсуждением, советом, ссылкой, рекомендацией коллеге, он легко и естественно умел отказывать предложению, которое вело к потере самостоятельности, компромиссу с совестью Учителя математики. В московском образовании след Виктора Васильевича виден во многом. Упомянем два наиболее значимых понятия: «уровневая дифференциация» — система планирования содержания, хода учебного процесса и оценивания, фундамент взаимного уважения учащихся, учителей, родителей за счет совместного формирования ожиданий и проверки результатов обучения; «московский образовательный стандарт» — инструмент свободы для учителя и учащихся. Таков же был вклад Фирсова и в образовательные системы других стран, в мировое математическое образование — спокойный, конструктивный, независимый.

Все, кому посчастливилось знать Виктора Васильевича Фирсова, работать с ним, навсегда сохранят о нем память. Спасибо Вам, Учитель!

Издательство «Просвещение»,
Лаборатория математического образования ИСМО РАО,
Московский институт открытого образования

В этом выпуске

Официальные документы
О проведении письменного экзамена по алгебре в IX классах, по математике, алгебре и началам анализа в XI (XII) классах общеобразовательных учреждений Российской Федерации в 2005/06 учебном году
Письмо Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки 2

Экзамены
Г. Фалин, А. Фалин
Сложные задачи вступительных экзаменов в МГУ: Текстовые задачи на смеси и сплавы .... 3—10

Олимпиады, конкурсы, турниры
Н. Жарковская
Простые числа, простые множители — непростые задачи 11

На стенд
К. Кноп
«Что? Где? Когда?»: приглашение к игре 12

Подписка-2006 13

Внимание, анонс!

Читайте в №9 и №10 газеты «Математика»:

Официальные документы
Экзаменационные работы для проведения письменного экзамена по алгебре и началам анализа за курс средней (полной) школы в 2005/06 уч. году .... №9

Экзамены
В. Алексеев, А. Бегунц, В. Галкин, В. Панферов, И. Сергеев, В. Тарасов
Конкурсная геометрия в МГУ в 2005 г.
Подборка геометрических задач (с ответами и решениями), предлагавшихся на разных факультетах .. №10

Л. Кузнецова, С. Суворова, Л. Рослова
Накануне экзамена
О новом экзамене по алгебре в 9-х классах, о результатах экзамена прошлого года ..... №9

Обратная связь
Н. Андреев
Одним разрезом
Совершенно неожиданная, новая задача на разрезание .... №9

Лекторий
С. Дориченко, В. Ященко
Популярно о криптографии
В продолжение темы, начатой статьей об олимпиаде по криптографии в №7 .... №9

О проведении письменного экзамена по алгебре в IX классах, по математике, алгебре и началам анализа в XI (XII) классах общеобразовательных учреждений Российской Федерации в 2005/06 учебном году

Письмо Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки от 20.02.2006 № 01-93/07-01

Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки на 2005/06 учебный год в целом сохраняет существующие в настоящий момент формы проведения государственной (итоговой) аттестации по алгебре в IX классах, по математике, алгебре и началам анализа в XI (XII) классах общеобразовательных учреждений Российской Федерации.

Текст письменного экзамена по алгебре в IX классах общеобразовательных учреждений составляется органами управления образованием субъектов Российской Федерации по «Сборнику заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс» (авторы: Л.В. Кузнецова и др., издательство «Дрофа»). Для проведения экзамена используется последняя редакция указанного сборника (издание 5-е, переработанное и дополненное, а также последующие издания). Варианты экзаменационных работ составляются в строгом соответствии с рекомендациями, приведенными во введении к сборнику. Там же указаны критерии, по которым должны оцениваться работы учащихся.

Руководители органов управления образованием субъектов Российской Федерации несут ответственность за подготовку текстов работ, сохранение секретности, своевременную передачу материалов в общеобразовательные учреждения.

Тексты экзаменационных работ, составленные на основе вышеназванного сборника, используются во всех IX классах общеобразовательных учреждений, включая классы компенсирующего обучения. Исключение составляют классы с углубленным изучением математики, где экзамен проводится по текстам, которые разрабатываются Минобрнауки России и направляются в органы управления образованием субъектов Российской Федерации.

В соответствии с письмом Департамента государственной политики в образовании Министерства образования и науки Российской Федерации «О проведении государственной (итоговой) аттестации по алгебре в IX классах общеобразовательных учреждений в 2005/2006 учебном году» (от 04.10.2005 № 03-1725) будет использоваться и новая форма проведения экзамена. Общеобразовательные учреждения, в которых аттестация по алгебре проводится по новой форме, определены органами управления образованием субъектов Российской Федерации. Тексты экзаменационных работ разрабатываются Минобрнауки России и передаются в органы управления образованием субъектов Российской Федерации в соответствии с поступившими от них заявками. Информация о новой форме проведения государственной (итоговой) аттестации выпускников основной школы по алгебре размещена на сайте Минобрнауки России www.mon.gov.ru

Для проведения письменного экзамена по алгебре и началам анализа в XI классах, обучение в которых осуществлялось в соответствии с обязательным минимумом содержания среднего (полного) общего образования (приказ Минобразования России от 30.06.1999 № 56), используется открытый перечень экзаменационных работ. Перечень включает 50 работ, составленных из заданий «Сборника заданий для проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс» (авторы: Г.В. Дорофеев, Г.К. Муравин, Е.А. Седова; издательство «Дрофа»). За один месяц до экзамена перечень работ будет опубликован в «Учительской газете», «Вестнике образования» и размещен в Интернете на сайте Рособрнадзора (www.obrnadzor.gov.ru).

Номер экзаменационной работы определяется в регионах Российской Федерации с использованием лототрона и передается общеобразовательным учреждениям по региональному телевидению или радиовещанию. В случае невозможности проведения экзамена с использованием лототрона по техническим причинам каждое общеобразовательное учреждение субъекта Российской Федерации обеспечивается экзаменационными материалами в традиционном порядке.

Для составления экзаменационных работ по алгебре и началам анализа для XI классов, обучение в которых осуществлялось в соответствии с федеральным компонентом государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089) на базовом уровне, и экзаменационных работ по математике (курс А) также используется «Сборник заданий для проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс» (авторы: Г.В. Дорофеев, Г.К. Муравин, Е.А. Седова; издательство «Дрофа»).

В органы управления образованием субъектов Российской Федерации направляются номера заданий из названного сборника, составляющих указанные экзаменационные работы, а также тексты письменных экзаменационных работ по алгебре и началам анализа для выпускников вечерних (сменных) общеобразовательных школ, математических и физико-математических классов.

Проведение экзамена по математике в общеобразовательных учреждениях субъектов Российской Федерации, участвующих в эксперименте по введению ЕГЭ, регламентируется соответствующими нормативными правовыми актами Минобрнауки России и субъектов Российской Федерации.

Руководитель В.А. Болотов

Г. ФАЛИН, А. ФАЛИН,
Москва

Сложные задачи вступительных экзаменов в МГУ: Текстовые задачи на смеси и сплавы

1. Основные понятия

Текстовые задачи на смеси и сплавы при всей их кажущейся простоте часто вызывают проблемы у абитуриентов. В этой статье мы подробно опишем методику их решения и на примерах реальных экзаменационных задач покажем, как ее применять.

При решении текстовых задач на смеси постоянно приходится работать со следующими понятиями:

€абсолютное содержание вещества в смеси;

€относительное содержание вещества в смеси.

Абсолютное содержание вещества в смеси — это количество вещества, выраженное в обычных единицах измерения (грамм, литр и т.д.).

Относительное содержание вещества в смеси — это отношение абсолютного содержания к общей массе (объему) смеси:

$$\text{относительное содержание} = \frac{\text{абсолютное содержание}}{\text{общая масса}}.$$

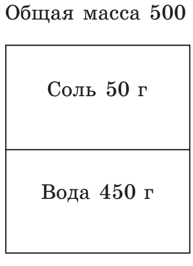
Часто относительное содержание называют *концентрацией* или *процентным содержанием*. При этом используются различные формы записи относительного содержания вещества: в долях и в процентах. Например, относительное содержание $0{,}05 = \frac{1}{20} = 5\%$.

Чтобы проиллюстрировать эти понятия, предположим, что в сосуд, содержащий 450 г воды, добавили 50 г соли. Таким образом, общая масса получившегося раствора 500 г.

В растворе абсолютное содержание соли 50 г, а относительное — $\frac{50\text{ г}}{500\text{ г}} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$.

Аналогично, в растворе абсолютное содержание воды 450 г, а относительное — $\frac{450\text{ г}}{500\text{ г}} = \frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\%$.

Проведенные выше простые выкладки удобно проиллюстрировать следующей условной картинкой (подобные картинки следует рисовать в процессе решения задач на смеси):



Абсолютное содержание соли = 50 г.
Относительное содержание соли $= \frac{50\text{ г}}{500\text{ г}} = 0{,}1$.
Абсолютное содержание воды = 450 г.
Относительное содержание воды $= \frac{450\text{ г}}{500\text{ г}} = 0{,}9$.

Решение любой задачи на смеси обычно сводится к расчету абсолютного и относительного содержания компонент всех смесей, фигурирующих в условии задачи. Хотя часто эта информация избыточна, лучше не ломать голову над тем, что может понадобиться в процессе решения, а что нет.

2. Типичные ситуации

2.1. Смешали две смеси

При образовании смеси складываются абсолютные содержания. Поэтому, если известны только относительные содержания, то нужно:

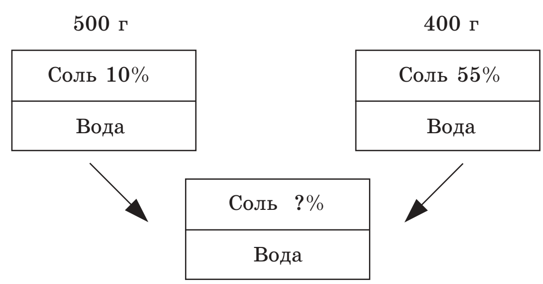
1) подсчитать абсолютные содержания;

2) сложить абсолютные содержания, то есть подсчитать абсолютные содержания компонент смеси;

3) подсчитать относительные содержания компонент смеси.

Пример. Смешали 500 г 10%-го раствора соли и 400 г 55% раствора соли. Определите концентрацию соли в смеси.

Решение. Условие задачи удобно представить в виде рисунка:



Теперь дополним эту картинку недостающей информацией.

• *Первый раствор*

1. Абсолютное содержание соли: 500 г (общая масса) $\cdot$ 0,1 (относительное содержание соли) = 50 г.

2. Абсолютное содержание воды: 500 г (общая масса) − 50 г (абсолютное содержание соли) = 450 г.

3. Относительное содержание воды:

$$\frac{450\text{ г (абсолютное содержание воды)}}{500\text{ г (общая масса)}} = 0{,}9 = 90\%.$$

Хотя две последние величины не потребуются при решении задачи, мы их подсчитали для полноты картины; в более сложных задачах также лучше не ломать голову над тем, понадобится или нет какая-то величина в будущем, а считать все абсолютные и относительные содержания.

• *Второй раствор*

4. Абсолютное содержание соли: 400 г (общая масса) $\cdot$ 0,55 (относительное содержание соли) = 220 г.

5. Абсолютное содержание воды: 400 г (общая масса) – 220 г (абсолютное содержание соли) = 180 г.

6. Относительное содержание воды:

$$\frac{180 \text{ г (абсолютное содержание воды)}}{400 \text{ г (общая масса)}} = 0{,}45 = 45\%.$$

• *Смесь двух исходных растворов*

7. Общая масса: 500 г (масса первого раствора) + + 400 г (масса второго раствора) = 900 г.

8. Абсолютное содержание соли: 50 г (абсолютное содержание соли в первом растворе) + 220 г (абсолютное содержание соли во втором растворе) = 270 г.

9. Относительное содержание соли:

$$\frac{270 \text{ г (абсолютное содержание соли)}}{900 \text{ г (общая масса)}} = \frac{27}{90} = 30\%.$$

10. Абсолютное содержание воды: 900 г (общая масса) – 270 г (абсолютное содержание соли) = 630 г. Это же значение можно получить, сложив абсолютное содержание воды в первой смеси (450 г) и абсолютное содержание воды во второй смеси (180 г).

11. Относительное содержание воды:

$$\frac{630 \text{ г (абсолютное содержание воды)}}{900 \text{ г (общая масса)}} = \frac{63}{90} = 70\%$$

(хотя две последние величины не требуются для решения задачи, мы их подсчитали для полноты картины).

Итак, концентрация соли в смеси двух исходных растворов — 30%.

В процессе решения задачи удобно наносить всю найденную информацию на исходную картинку, так что к концу решения она будет выглядеть следующим образом:

500 г	400 г
Соль 10% = 50 г	Соль 55% = 220 г
Вода 90% = 450 г	Вода 45% = 180 г

↘ ↙

900 г
Соль 270 г = 30%
Вода 630 г = 70%

2.2. Отлили часть раствора/отрезали кусок сплава

При этой операции, очевидно, остается неизменной концентрация веществ (если из чашки отлить немного чая в другую чашку, то чай не станет слаще). Поэтому после отливания части раствора относительные содержания можно считать известными и необходимо подсчитывать абсолютные содержания.

Пример. От куска сплава золота с серебром массой 500 г и 10%-м содержанием золота отрезали 20 г. Определите количество золота и серебра в отрезанном куске.

Решение. Условие задачи удобно представить в виде рисунка:

500 г		20 г
Золото 10%	Отрезали 20 г →	Золото ? г
Серебро		Серебро ? г

Теперь дополним эту картинку недостающей информацией.

• *Исходный сплав*

1. Абсолютное содержание золота: 500 г (общая масса) $\cdot$ 0,1 (относительное содержание золота) = 50 г.

2. Абсолютное содержание серебра: 500 г (общая масса) – 50 г (абсолютное содержание золота) = 450 г.

3. Относительное содержание серебра:

$$\frac{450 \text{ г (абсолютное содержание серебра)}}{500 \text{ г (общая масса)}} = 0{,}9 = 90\%.$$

• *Отрезанный кусок*

4. Относительное содержание золота: 10% (осталось неизменным).

5. Абсолютное содержание золота: 20 г (общая масса) $\cdot$ 0,1 (относительное содержание золота) = 2 г.

6. Относительное содержание серебра: 90% (осталось неизменным).

7. Абсолютное содержание серебра: 20 г (общая масса) $\cdot$ 0,9 (относительное содержание серебра) = 18 г.

Итак, в отрезанном куске содержится 2 г золота и 18 г серебра.

К концу решения картинка будет выглядеть так:

500 г		20 г
Золото 10% = 50 г	Отрезали 20 г →	Золото 10% = 2 г
Серебро 450 г = 90%		Серебро 90% = 18 г

3. Примеры решения задачи на смеси

1. (*Физический факультет, 1978, № 2.*) Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4% примесей. Сколько получится металла из 24 тонн руды?

Решение. Условие задачи можно представить в виде следующей картинки:

Руда 24 т		Металл x т
Чистый металл	Процесс плавки →	Чистый металл
Примеси 40%		Примеси 4%

Теперь дополним эту картинку недостающей информацией.

• *Руда*

1. Абсолютное содержание примесей: $0{,}4 \cdot 24 = 9{,}6$ т.

2. Абсолютное содержание чистого металла:

$$24 - 9{,}6 = 14{,}4 \text{ т.}$$

• *Металл*

3. Абсолютное содержание примесей: $0{,}04x$ т.

4. Абсолютное содержание чистого металла:

$$x - 0{,}04x = 0{,}96x \text{ т.}$$

Картинка будет выглядеть следующим образом:

Руда 24 т

Руда 24 т
Черный металл 14,4 т
Примеси 9,6 т

Процесс плавки $\longrightarrow$

Металл x т

Металл x т
Чистый металл $0{,}96x$ т
Примеси $0{,}04x$ т

В процессе плавки из руды удаляется большая часть примесей, а общее количество чистого металла остается неизменным, то есть справедливо равенство $0{,}96x = 14{,}4$, откуда $x = 15$.

Ответ: 15 т.

2. (*Геологический факультет, 1995, № 6.*) Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке — 10%, во втором — 40%. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором 30%. Определить массу полученного слитка.

Решение. Пусть x кг — масса первого слитка, тогда масса второго слитка равна $(x + 3)$ кг. Первый слиток содержит $0{,}1x$ кг меди, а второй — $0{,}4(x + 3)$ кг. Поэтому сплав содержит $(0{,}5x + 1{,}2)$ кг меди, а его масса равна $(2x + 3)$ кг. Поэтому относительное содержание меди в сплаве равно $\frac{0,5x+1,2}{2x+3}$. По условию задачи эта величина равна 0,3:

$$\frac{0,5x+1,2}{2x+3} = 0{,}3.$$

Решая это уравнение, мы получим $x = 3$, так что масса сплава равна 9 кг.

Ответ: 9 кг.

3. (*Геологический факультет, 1989, № 5.*) В сосуде находилось 9 кг раствора соли в воде. Из сосуда отлили часть раствора и добавили количество воды, равное по весу отлитой части раствора. Затем опять вылили столько же по весу раствора, сколько в первый раз. После этого количество соли в сосуде уменьшилось в $\frac{9}{4}$ раза по сравнению с исходным количеством. Определить первоначальное количество соли в сосуде, если известно, что вес добавленной воды вдвое меньше первоначального веса соли в растворе.

Решение. Исходную ситуацию можно представить в виде следующей картинки:

Общая масса 9 кг
Соль
Вода

Для того чтобы иметь возможность писать формулы, нам нужно знать абсолютное или относительное содержание соли или воды (хотя бы в виде букв). Имея в виду последнее предложение из текста задачи («определить первоначальное количество соли», «вес добавленной воды вдвое меньше первоначального веса соли в растворе»), где фигурирует «первоначальное количество соли», то есть (в нашей терминологии) «абсолютное содержание соли», мы обозначим абсолютное содержание соли в исходном растворе x кг. Соответственно, абсолютное содержание воды $(9 - x)$ кг, относительное содержание соли $\frac{x}{9}$, относительное содержание воды $\frac{9-x}{9}$.

Теперь первоначальную картинку можно заменить более содержательным рисунком:

Общая масса 9 кг
Соль x кг, концентрация $\frac{x}{9}$
Вода $(9 - x)$ кг, концентрация $\frac{9-x}{9}$

Начнем теперь анализировать (и изображать графически) ситуации, описанные в тексте задачи.

• На первом шаге из сосуда отлили $\frac{x}{2}$ кг раствора (напомним, что по условию отлили столько же, сколько затем добавили воды, а вес добавленной воды вдвое меньше абсолютного содержания соли в первоначальном растворе, то есть x). Это наша вторая стандартная ситуация, и мы знаем, что при этом не меняется концентрация. Графически это можно изобразить следующим образом:

Общая масса 9 кг
Соль x кг, концентрация $\frac{x}{9}$
Вода $(9 - x)$ кг, концентрация $\frac{9-x}{9}$

Отлили

Общая масса $\frac{x}{2}$ кг
Соль ? кг, концентрация $\frac{x}{9}$
Вода ? кг, концентрация $\frac{9-x}{9}$

Осталось

Общая масса $\left(9 - \frac{x}{2}\right)$ кг
Соль ? кг, концентрация $\frac{x}{9}$
Вода ? кг, концентрация $\frac{9-x}{9}$

Зная общую массу отлитого раствора и концентрацию соли и воды, можно подсчитать абсолютное содержание соли и воды в отлитой части раствора:

1. Абсолютное содержание соли равно

$$\frac{x}{2}\text{ кг}\cdot\frac{x}{9}=\frac{x^2}{18}\text{ кг.}$$

2. Абсолютное содержание воды равно

$$\frac{x}{2}\text{ кг}\cdot\frac{9-x}{9}=\frac{x(9-x)}{18}\text{ кг.}$$

Подобным же образом для оставшейся части раствора мы имеем:

3. Абсолютное содержание соли равно

$$\left(9-\frac{x}{2}\right)\text{ кг}\cdot\frac{x}{9}=\frac{18x-x^2}{18}\text{ кг.}$$

4. Абсолютное содержание воды равно

$$\left(9-\frac{x}{2}\right)\text{ кг}\cdot\frac{9-x}{9}=\frac{(18-x)(9-x)}{18}\text{ кг.}$$

Теперь предыдущая картинка может быть уточнена:

Общая масса 9 кг

Соль x кг, концентрация $\frac{x}{9}$
Вода $(9-x)$ кг, концентрация $\frac{9-x}{9}$

Отлили

Общая масса $\frac{x}{2}$ кг

Соль $\frac{x^2}{18}$ кг, концентрация $\frac{x}{9}$
Вода $\frac{x(9-x)}{18}$ кг, концентрация $\frac{9-x}{9}$

Осталось

Общая масса $\left(9-\frac{x}{2}\right)$ кг

Соль $\frac{18x-x^2}{18}$ кг, концентрация $\frac{x}{9}$
Вода $\frac{(18-x)(9-x)}{18}$ кг, концентрация $\frac{9-x}{9}$

• На втором шаге в сосуд добавили $\frac{x}{2}$ кг воды. Это наша первая стандартная ситуация, и мы знаем, что при этом складываются абсолютные содержания веществ. Поэтому в результате после добавления воды в сосуде окажется $\frac{18x-x^2}{18}$ кг соли и $\frac{162-18x+x^2}{18}$ кг воды.

После этого следует рассчитать относительное содержание соли и воды:

1. Относительное содержание соли равно $\frac{18x-x^2}{162}$.

2. Относительное содержание воды равно

$$\frac{162-18x+x^2}{162}.$$

Графически это можно изобразить следующим образом:

Раствор

Общая масса $\left(9-\frac{x}{2}\right)$ кг

Соль $\frac{18x-x^2}{18}$ кг, концентрация $\frac{x}{9}$
Вода $\frac{(18-x)(9-x)}{18}$ кг, концентрация $\frac{9-x}{9}$

Вода

Общая масса $\frac{x}{2}$ кг

Соль 0 кг, концентрация 0
Вода $\frac{x}{2}$ кг, концентрация 1

Общая масса 9 кг

Соль $\frac{18x-x^2}{18}$ кг, концентрация $\frac{18x-x^2}{162}$
Вода $\frac{162-18x+x^2}{18}$ кг, концентрация $\frac{162-18x+x^2}{162}$

• На третьем шаге из сосуда отлили $\frac{x}{2}$ кг раствора. Это наша вторая стандартная ситуация, и мы знаем, что при этом не меняется концентрация. Графически это можно изобразить следующим образом:

Общая масса 9 кг

Соль $\frac{18x-x^2}{18}$ кг, концентрация $\frac{18x-x^2}{162}$
Вода $\frac{162-18x+x^2}{18}$ кг, концентрация $\frac{162-18x+x^2}{162}$

Отлили

Общая масса $\frac{x}{2}$ кг

Соль ? кг, концентрация $\frac{18x-x^2}{162}$
Вода ? кг, концентрация $\frac{162-18x+x^2}{162}$

Осталось

Общая масса $\left(9-\frac{x}{2}\right)$ кг

Соль ? кг, концентрация $\frac{18x-x^2}{162}$
Вода ? кг, концентрация $\frac{162-18x+x^2}{162}$

Зная общую массу отлитого раствора и концентрацию соли и воды, можно подсчитать абсолютное содержание соли в оставшейся части раствора (поскольку в заключительной части задачи фигурирует только эта величина, мы ограничимся ее расчетом): абсолютное содержание соли равно

$$\left(9-\frac{x}{2}\right)\text{ кг}\cdot\frac{18x-x^2}{162} = \frac{(18-x)^2x}{324}\text{ кг}.$$

• По условию задачи эта величина составляет $\frac{4x}{9}$ («*после этого количество соли в сосуде уменьшилось в* $\frac{9}{4}$ *раз по сравнению с исходным количеством*»). Таким образом, мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{(18-x)^2\cdot x}{324} = \frac{4x}{9}.$$

После сокращения на x (по смыслу задачи $x \neq 0$) мы получим: $(18 - x)^2 = 4\cdot 36$, откуда (поскольку $18 - x > 0$) $18 - x = 2\cdot 6$, так что окончательно мы имеем $x = 6$ кг.

Ответ: первоначально в сосуде находилось 6 кг соли.

В заключение отметим, что после решения задачи полезно сделать проверку. Это позволит «выловить» ошибки (если они возникли в процессе решения). В нашем случае мы имеем:

1. В сосуде находилось 9 кг раствора соли. Количество соли в растворе равно 6 кг, так что ее концентрация равна $\frac{2}{3}$.

2. После того, как из сосуда вылили 3 кг раствора, в нем осталось 6 кг раствора с концентрацией соли $\frac{2}{3}$. Таким образом, абсолютное содержание соли равно 4 кг, а абсолютное содержание воды 2 кг.

3. После добавления 3 кг воды в сосуде окажется 5 кг воды и 4 кг соли. Концентрация соли составит $\frac{4}{9}$.

4. После того, как из сосуда вылили 3 кг раствора, в нем осталось 6 кг раствора с концентрацией соли $\frac{4}{9}$. Таким образом, абсолютное содержание соли равно $\frac{8}{3}$ кг, что в $6 : \frac{8}{3} = \frac{9}{4}$ раз меньше первоначального содержания соли в растворе.

Дадим кратко другую схему решения данной задачи.

Пусть $p\%$ — первоначальная концентрация соли, ν кг — количество отливаемого раствора ($0 < \nu < 9$), x — первоначальное количество соли в растворе $\left(x = \frac{9p}{100}\text{ кг}\right)$.

После первого действия (отлили €кг раствора и добавили ν кг воды) концентрация соли в растворе стала $\frac{(9-\nu)\cdot p}{9}\%$.

После второго действия (опять отлили ν кг раствора) количество соли стало

$$\frac{(9-\nu)^2\cdot p}{9\cdot 100} = \frac{4}{9}x.$$

По условию задачи $\nu = 0{,}5x = \frac{0{,}5\cdot 9p}{100}$. Отсюда

$$\nu = 3,\ x = 2\nu = 6\text{ кг}.$$

4. (*Олимпиада «Покори Воробьевы горы», 2006, № 1*.) Чашка до краев наполнена черным кофе в количестве 100 мл, а в кувшин налито 300 мл молока. Какое количество кофе надо перелить из чашки в кувшин и, перемешав, снова наполнить ее до краев полученной смесью, чтобы молока и кофе в чашке оказалось поровну?

Решение. Пусть x — искомый объем кофе (в мл). Отлить это количество из чашки можно, если $0 \le x \le 100$.

После того, как из чашки перелили в кувшин x мл кофе, в чашке осталось $(100 - x)$ мл кофе, а в кувшине оказалось $(300 + x)$ мл смеси кофе и молока. Абсолютное содержание молока в кувшине равно 300 мл, а его концентрация равна $\frac{300}{300+x}$.

Количество смеси, которое перелили из кувшина в чашку, очевидно, равно x мл (чашка должна быть снова наполнена до краев). Относительное содержание молока в переливаемой части смеси такое же, как и в кувшине, то есть $\frac{300}{300+x}$. Поэтому абсолютное содержание молока в этой части смеси равно $\frac{300x}{300+x}$.

После того, как чашка опять наполнится, абсолютное содержание молока в ней будет $\frac{300x}{300+x}$. По условию задачи эта величина равна 50 мл. Решая уравнение

$$\frac{300x}{300+x} = 50,$$

мы получим $x = 60$. Это значение удовлетворяет ограничению $0 \le x \le 100$, отмеченному в начале решения.

Ответ: 60 мл.

4. Исследование функций в задачах на смеси и сплавы

5. (*Химический факультет, 1992, № 4.*) Даны три сплава. Состав первого сплава: 55% хрома и 45% никеля. Состав второго сплава: 60% никеля, 25% хрома и 15% кобальта. Состав третьего сплава: 70% хрома и 30% кобальта. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 20% кобальта. Какие значения может принимать процентное содержание никеля в этом новом сплаве?

Решение. Предположим, что для приготовления нового сплава взяли x кг первого сплава, y кг второго и z кг третьего. Тогда новый сплав будет иметь массу $(x + y + z)$ кг и будет содержать $(0{,}55x + 0{,}25y + 0{,}7z)$ кг хрома, $(0{,}45x + 0{,}6y)$ кг никеля, $(0{,}15y + 0{,}3z)$ кг кобальта.

Относительное содержание кобальта в новом сплаве равно $\frac{0,15y+0,3z}{x+y+z}$, а относительное содержание никеля — $f=\frac{0,45x+0,6y}{x+y+z}$, область значений этой функции f мы должны найти.

Условие $\frac{0,15y+0,3z}{x+y+z}=0{,}2$ позволяет исключить одну из переменных, например, z: $z = 2x + 0{,}5y$. Теперь функция f станет зависеть только от двух переменных: $f=\frac{0,45x+0,6y}{3x+1,5y}$. Мы должны найти область ее значений при изменении независимых переменных x и y в области $x \ge 0$, $y \ge 0$ (нетрудно понять, что эти переменные не могут быть одновременно равны нулю, так как тогда относительное содержание кобальта в новом сплаве будет 0,3).

Если $y \ne 0$, то f можно рассматривать как дробно-линейную функцию одной переменной x (считая y параметром). Записывая f в виде

$$f=0{,}15\left(1+\frac{5y}{6x+3y}\right),$$

легко видеть, что при росте x от 0 до ∞ величина f убывает от 0,4 до 0,15.

Значение $f = 0{,}4$ достигается при $x = 0$. Значение $f = 0{,}15$ достигается при $y = 0$.

Ответ: процентное содержание никеля в новом сплаве меняется от 15 (новый сплав составлен только из первого и третьего сплавов) до 40% (новый сплав составлен только из второго и третьего сплавов).

6. (*Факультет наук о материалах, 2000, май, № 4.*) Имеется три сплава, в состав которых входят металлы A, B и C. Первый сплав содержит 20% металла A, 30% металла B, 50% металла C. Второй сплав содержит 50% металла A, 20% металла B, 30% металла C. Третий сплав содержит 30% металла A, 40% металла B, 30% металла C. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 10 кг нового сплава, который содержал бы 25% металла A, а процентное содержание металла B было бы минимально возможным?

Решение. Обозначим через x, y, z массы сплавов, которые мы берем для приготовления нового сплава.

По условию

$x + y + z = 10$ (масса нового сплава 10 кг),

$0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}3z = 2{,}5$ (абсолютное содержание металла A в новом сплаве составляет $10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$ кг).

Из двух этих уравнений можно исключить две переменные, например, x и z: $x = 5 + 2y$, $z = 5 - 3y$. Поскольку все переменные в задаче неотрицательны, переменная y меняется на отрезке $0 \le y \le \frac{5}{3}$.

Абсолютное содержание металла B в сплаве равно

$$0{,}3x + 0{,}2y + 0{,}4z = 3{,}5 - 0{,}4y.$$

Процентное (относительное) содержание металла B в сплаве равно

$$f = 0{,}35 - 0{,}04y.$$

Минимум этой функции на отрезке $0 \le y \le \frac{5}{3}$ достигается при $y=\frac{5}{3}$. Соответственно, $x=\frac{25}{3}$, $z = 0$.

Ответ: $\frac{25}{3}$, $\frac{5}{3}$ и 0 кг.

Дадим *другое решение* задачи 6.

Понятно, что для получения нового сплава с 25% содержанием металла A в основном надо использовать первый сплав (только в этом сплаве процентное содержание металла A меньше 25), добавляя к нему некоторое количество второго или третьего сплава. Однако добавление третьего сплава увеличивает концентрацию металла B, а добавление второго сплава ее уменьшает. Следовательно, надо добавлять к первому сплаву только второй.

В терминах приведенного выше решения это означает

$$\begin{cases} x>0,\ y>0,\ z=0,\\ x+y=10,\\ 0,2x+0,5y=2,5. \end{cases}$$

Единственное решение этой системы

$$x=\frac{25}{3},\ y=\frac{5}{3},\ z=0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. (*Геологический факультет, 1997, май, № 5.*) В свежих грибах влага составляет $\frac{9}{10}$ от общей массы, а в сушеных — $\frac{1}{10}$. Сколько нужно собрать грибов, чтобы заготовить 1 пуд сушеных грибов?

2. (*Факультет почвоведения, 1999, июль, № 5.*) Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор?

3. (*Филологический факультет, 2000, июль, № 1.*) Имеется 40 л 0,5%-го раствора и 50 л 2%-го раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5%-го раствора уксусной кислоты?

4. (*Экономический факультет, 1965, № 1.*) Один сплав содержит медь и олово в отношении 2 : 1, а другой — в отношении 3 : 2. По скольку частей нужно взять каждого из этих сплавов, чтобы получить третий сплав, в котором медь и олово содержатся в отношении 27 : 17?

5. (*Факультет ВМК, 1996, № 2.*) Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй — 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 л первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 л первого, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой.

6. (*Факультет почвоведения, 1978, № 3.*) Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найдите, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

7. (*Экономический факультет (политической экономии), 1980, № 4.*) Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определите, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.

8. (*Геологический факультет, 2001, май, № 6.*) При проведении опыта раствор A был получен растворением ненулевого объема кислоты в воде. Раствор B был получен из раствора A добавлением некоторого объема воды, при этом концентрация раствора (отношение объема кислоты к общему объему раствора) уменьшилась на 40%. Раствор C получен из раствора B добавлением нового количества воды, в два раза большего по объему, чем было добавлено к раствору A при получении B. Во сколько раз концентрация раствора B больше концентрации раствора C?

9. (*Географический факультет, 1981, № 3.*) Имеется два раствора серной кислоты в воде: первый — 40%-й, второй — 60%-й. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-й раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 40%-го и 60%-го растворов?

10. (*Факультет наук о материалах, 2004, апрель, № 1.*) Для приготовления водного раствора кислоты взяли 4 л 40%-го и 6 л 60%-го растворов кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество чистой воды, в результате чего получился 39%-й раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено?

11. (*Геологический факультет (геофиз.), 1981, № 5.*) Для составления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда: первый емкостью 10 л, второй — 20 л. Сначала в оба сосуда было налито всего 15 л жидкости A. Затем первый сосуд был дополнен доверху жидкостью B и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд был дополнен доверху смесью из первого сосуда. После того как в первый сосуд было добавлено жидкости A столько, сколько было в него ее налито сначала, отношения количества жидкости A ко всему объему имеющейся жидкости в сосуде для первого и второго сосудов стали равными. Сколько литров жидкости A было налито первоначально в первый сосуд?

12. (*ВМК, 2000, июль, № 2.*) Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора 1 л воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора 39 л воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найдите концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

13. (*Биологический факультет, 1966, № 1.*) Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, берут первого раствора вдвое больше по весу, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго растворов испарилось по 200 г воды, и для получения такой же смеси, как и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по весу, чем второго. Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 г каждого раствора?

14. (*Геологический факультет, 1996, май, № 5.*) В одном декалитре кислотного раствора 96% объема составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация кислоты в полученном растворе была не больше 40%?

15. (*Биологический факультет, 1976, № 3.*) Имеются две смеси N_1 и N_2, составленные из одних и тех же веществ *А*, *Б*, *В*, но взятых в различных весовых соотношениях. В смеси N_1 вещества *В* в 9 раз меньше, чем вещества *А*, и в 2 раза меньше, чем вещества *Б*. Соединив 6 кг смеси N_1 с 3 кг смеси N_2 и добавив 1 кг вещества *А*, получили новую смесь, в которой вещества *А* в 6 раз больше, чем вещества *Б*, а вещества *В* столько же, сколько вещества *Б*. Требуется определить весовое соотношение веществ *А*, *Б*, *В* в смеси N_2.

16. (*Психологический факультет, 1986, № 4.*) В три сосуда налито по 1 кг различных растворов поваренной соли. Если смешать 200 г первого раствора и 100 г второго раствора, то в полученной смеси будет содержаться столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора. Количества соли в трех растворах, взятых в порядке номеров растворов, образуют геометрическую прогрессию. Сколько граммов второго раствора нужно взять, чтобы в них содержалось столько же соли, сколько ее содержится в 100 г третьего раствора?

17. (*Филологический факультет, 1990, № 4.*) От двух сплавов массой 7 кг и 3 кг с различным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава. Кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определите массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

18. (*Факультет почвоведения, 1997, № 4.*) В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в воде?

19. (*Геологический факультет, 1989, № 5.*) В баке находилось 100 л смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объему количество воды, которое на 10 л превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством ее в исходной смеси. Определите количество воды в исходной смеси.

20. (*Экономический факультет (политической экономии), 1979, № 3.*) Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 л воды. После перемешивания снова отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

21. (*Факультет почвоведения, 1988, № 4.*) Два вида удобрений *А* и *Б* отличаются весовым содержанием азота, калия и фосфора. В удобрении *А* азота содержится в три раза, а фосфора в два раза больше по весу, чем калия. В удобрении *Б* соответственно азота в $\frac{5}{3}$ раза больше, а фосфора в 1,5 раза меньше, чем калия. Можно ли за счет смешивания удобрений *А* и *Б* приготовить удобрение, в котором азота в два раза, а фосфора в три раза больше, чем калия?

22. (*Химический факультет, 1997, май, № 4.*) Из сосуда, содержащего чистый спирт, отлили $\frac{1}{3}$ часть и добавили такое же количество воды. Потом отлили $\frac{1}{3}$ часть смеси и добавили такое же количество воды. Так проделали k раз (включая первое переливание). Каково наименьшее значение k, при котором процентное содержание спирта в сосуде после сделанных переливаний станет меньше 10%?

23. (*Механико-математический факультет, 1981, № 3.*) В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. О числах p и q известно только, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

24. (*Экономический факультет (кибернетика), 1978, № 4.*) Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

Ответы

1. 9 пудов. **2.** $\frac{2}{3}$ л. **3.** 10 л и 20 л. **4.** 9 и 35. **5.** 5 л. **6.** Первый слиток в 2 раза тяжелее второго. **7.** 170 кг. **8.** В 1,8 раза. **9.** 1 кг 40%-го и 2 кг 60%-го раствора. **10.** 2,5 л. **11.** 3 л. **12.** 90%. **13.** 5 г и 20 г. **14.** Не менее 1,4 декалитров. **15.** 8 : 1 : 3. **16.** 200 г. **17.** 2,1 кг. **18.** 8%. **19.** 60 л. **20.** 0,5 л глицерина; 2,3 л воды. **21.** Нельзя. **22.** 6. **23.** $18\frac{1}{3}$ кг. **24.** 40% (составлен из первого и третьего сплавов) и $43\frac{1}{3}$% (составлен из первого и второго сплавов).

Н. ЖАРКОВСКАЯ,
г. Санкт-Петербург

Простые числа, простые множители — непростые задачи

Сегодня мы рассмотрим подборку задач теоретико-числового характера из конкурсов прошлых лет. Для решения этих задач достаточно знать очень немного:

- определение простого числа;
- теорему о разложении натурального числа на простые множители;
- простейшие признаки делимости.

Роль этих задач в формировании азов математической культуры школьников трудно переоценить.

Каждая задача в нашей подборке снабжена указанием процента участников конкурса, решивших ее верно (первое число относится к младшей параллели, а второе — к старшей).

1. (*7–8-е классы, 2002 г.*; 17%, 19%.) Любитель арифметики перемножил первые 2002 простых числа. На сколько нулей заканчивается произведение?

(A) 0. **(B)** 1. **(C)** 10. **(D)** 20. **(E)** 100.

Решение. Ясно, что один ноль в произведении есть: и 2, и 5 входят в набор первых 2002 простых чисел. Также ясно должно быть, что больше нулей в этом произведении нет, поскольку сомножители не повторяются, а других способов получить ноль на конце произведения нет. Итак, *ответ*: B.

2. (*5–6-е классы, 2004 г.*; 23%, 31%.) У двузначного числа n цифра десятков в два раза больше, чем цифра единиц. Тогда число n обязательно…

(A) Четное. **(B)** Нечетное. **(C)** Меньше 20. **(D)** Делится на 3. **(E)** Делится на 6.

Решение. Если цифра единиц равна a, то цифра десятков — $2a$, а их сумма равна $3a$, следовательно, число n делится на 3. *Ответ*: D.

3. (*7–8-е классы, 2003 г.*; 17%, 17%.) Сколькими способами можно записать число 2003 в виде суммы $a + b$, где a и b — простые числа и $a < b$?

(A) 0. **(B)** 1. **(C)** 2. **(D)** 3. **(E)** Более 3.

Решение. Заметим, что сумма двух чисел нечетна только в том случае, когда одно их слагаемых четно, а другое — нечетно. Поскольку четное простое число существует ровно одно, то искомая запись может быть только 2 + 2001, но число 2001 делится на 3, следовательно, верный *ответ*: A.

4. (*7–8-е классы, 2004 г.*; 18%, 21%.) Наибольший делитель числа $3^{2004} + 6$, отличный от этого числа, равен…

(A) $3^{2003} + 3$. **(B)** 3^{2003}. **(C)** $3^{2003} + 2$. **(D)** 3. **(E)** 3^{2004}.

Решение. Достаточно заметить, что число равно произведению своего наименьшего делителя (отличного от 1) на наибольший. Ясно, что проще искать наименьший делитель. Теперь заметим, что число $3^{2004} + 6$ нечетно и делится на 3, следовательно, 3 — наименьший делитель, а $3^{2004} + 6 = 3\cdot(3^{2003} + 2)$. Поэтому верный *ответ*: C.

5. (*7–8-е классы, 2004 г.*; 31%, 37%.) Если a и b — натуральные числа, ни одно из которых не делится на 10, и $ab = 10\,000$, то $a + b$ равно…

(A) 1024. **(B)** 641. **(C)** 74. **(D)** 34. **(E)** 1000.

Решение. Заметим, что $10\,000 = 2^4\cdot 5^4$, а поскольку ни одно из чисел a и b не делится на 10, то все двойки должны войти в разложение на множители одного из этих чисел, а все пятерки — в разложение другого, то есть $a = 2^4 = 16$, $b = 5^4 = 625$. Тогда $a + b = 641$. Правильный *ответ*: B.

6. (*7–8-е классы, 2004 г.*; 10%, 11%.) Натуральное число b в 64 раза больше натурального числа a. Какое из следующих соотношений невозможно?

(A) $b = a^3$. **(B)** $b = a^4$. **(C)** $b = a^2$. **(D)** $b = a^7$. **(E)** $b = a^6$.

Решение. По условию $b = a^k = 64\,a$, следовательно, $a^{k-1} = 64^1 = 2^6 = 4^3 = 8^2$, но это означает, что k может равняться 2, 7, 4 и 3 и не может равняться 6. Итак, *ответ*: E.

Несмотря на то, что все рассмотренные задачи не слишком сложны, они оказалась серьезным препятствием для участников конкурса.

В завершение рассмотрим две более сложные задачи.

7. (*7–8-е классы, 2002 г.*; 12%, 13%.) Сколько простых чисел равны сумме двух простых чисел и одновременно разности двух простых чисел?

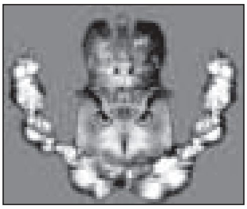
(A) 1. **(B)** 3. **(C)** 4. **(D)** 0. **(E)** Бесконечно много.

Решение. Пусть p_1, p_2, p_3, p_4 — такие простые числа, что $p_1 + p_2 = p_3 - p_4 = p$ — простое число. Прежде всего заметим, что среди чисел p_1 и p_2 есть число 2 (иначе получится, что p — четное простое число, большее, чем 2). Будем считать, что $p_1 = 2$. Если предположить, что числа p_3 и p_4 оба нечетны, то окажется, что $p = 2$, и следовательно, $p_2 = 0$ (это для простого числа невозможно), следовательно, одно из этих чисел также равно 2. Ясно, что это может быть только p_4, итак, $2 + p_2 = p_3 - 2$. Из последнего равенства получаем, что $p_3 = p_2 + 4$. Теперь заметим, что если $p_2 = 3$, то $p_3 = 7$, и мы получаем удовлетворяющее условиям задачи равенство $2 + 3 = 7 - 2 = 5$. Покажем, что никаких других чисел с такими свойствами нет. Действительно, если при делении на 3 число p_2 дает остаток 1, то сумма $p = p_1 + p_2 = 2 + p_2$ должна делиться на 3 (и быть больше, чем 3), следовательно, она не может быть простым числом. Если же при делении на 3 число p_2 дает остаток 2, то число $p_3 = p_2 + 4$ делится на 3 и не может быть простым числом. Если же остаток равен 0, это значит, что само число p_2 не является простым. Итак, *ответ*: A.

8. (*7–8-е классы, 2004 г.*; 14%, 14%.) У натурального числа n ровно 3 различных простых делителя, у числа $11n$ таких делителей тоже 3, а у числа $6n$ — четыре. Сумма цифр наименьшего такого числа n равна

(A) 2. **(B)** 5. **(C)** 8. **(D)** 11. **(E)** Другой ответ.

Решение. Поскольку у числа $11n$ столько же различных простых делителей, сколько у n, то n делится на 11. Из того, что число $6n$ имеет на один простой делитель больше, следует, что либо 2 делит n, а 3 не делит, либо наоборот. Итак, нам нужно найти самое маленькое из чисел, список различных простых делителей которых состоит из числа 11, точно одного из чисел 2 или 3 и еще какого-то простого числа. Ясно, что это число равно $2\cdot 11\cdot 5 = 110$. *Ответ*: A.



К. КНОП,
г. Санкт-Петербург

«Что? Где? Когда?»: приглашение к игре

Тур 1

Вопрос 1. Более века назад в этом почетном праве было отказано журналистам. А вот математикам в этом было отказано из-за любовной истории. Итак, какой возможности лишились математики?

В. Калашников (Москва)

Вопрос 2. Знаменитый ученый-энциклопедист Эратосфен был и поэтом, и филологом, и географом, и астрономом, и математиком. От современников он получил прозвище Бета. Его можно перевести на русский язык двумя словами, первое из которых — «Вечно…». Напишите второе слово.

Д. Борок (г. Самара)

Вопрос 3. Сборник «В мире математики» утверждает, что 1 секунда — это минимальное время, за которое ОНА проходит 21 600 секунд. Это парадоксальное утверждение, тем не менее, абсолютно верно. Назовите ЕЕ.

В. Брайман (г. Киев)

Вопрос 4. В XIX веке в высшем обществе была популярна игра «омонимы». Одно из слов объяснялось музыкантом, математиком и охотником, каждый из которых давал свое определение. О каком слове идет речь?

А. Кузьма (Санкт-Петербург)

Вопрос 5. В 1904 году известный математик Рихард Дедекинд написал письмо составителю одного справочника по поводу даты «4 сентября 1899 года». В письме было написано: «Разрешаю себе обратить Ваше внимание на то, что, по крайней мере, год указан неверно». Что, по мнению составителя, произошло 4 сентября 1899 года?

Е. Поникаров (Санкт-Петербург)

Вопрос 6. В «Памятке последнему уходящему», висящей в одной из аудиторий матмеха СПбГУ, есть следующий пункт: «Выключить все работающие электронагреватели, [слово пропущено] масляные радиаторы». Восстановите пропущенное слово.

А. Губанов (Санкт-Петербург)

Тур 2

Вопрос 1. Корова – 2, овца – 2, свинья – 3, собака – 3, кошка – 3, утка – 3, кукушка – 4, петух – 8, ослик – ?

Эту загадку задают детям при поступлении в физико-математический класс одной из московских школ. Замените знак вопроса числом и поясните, что оно означает.

Д. Крапивин (Москва)

Вопрос 2. В одной из книг известного популяризатора математики Мартина Гарднера приведено начало бесконечной последовательности 3, 3, 5, 4, 4, 3,… и т.д. В русском издании эта последовательность «исправлена» и выглядит так: 4, 3, 3, 6, 4, 5,… Напишите два следующих члена этой последовательности в ее «русском» варианте.

А. Богомолов (г. Самара)

Вопрос 3. Некий господин для моциона регулярно прогуливался от своего дома до близлежащей одноколейки, идущей из города *А* в город *Б*. Он дожидался появления поезда и возвращался домой. Однажды он отметил, что из города *А* поезда попадаются ему вчетверо чаще, чем из *Б*. Он попытался поменять время прогулок — безрезультатно. Объясните этот странный факт.

А. Ленский (Москва)

Вопрос 4. Закончите известную среди математиков шутку: «Математики делятся на три группы: те, кто умеют считать до трех, те, кто не умеют считать до трех…»

К. Кноп (Санкт-Петербург)

Вопрос 5. Декан математического факультета Геттингенского университета Феликс Клейн правил подчиненными, что называется, «железной рукой». Один из его подчиненных отомстил ему, предложив такую логическую задачку: «Все математики Геттингена принадлежат к двум классам. Одни делают то, что не нравится им, но нравится Клейну. Другие делают то, что нравится им, но не нравится Клейну. К какому классу относится сам Клейн?» Решите и вы эту задачку, учтя, что «ни к какому» — ответ не для математиков…

Л. Климович (г. Гомель)

Вопрос 6. От сосны высотой 18 метров до озера 6 метров. На какой высоте должна переломиться сосна, чтобы ее верхушка аккурат достала до края воды?

Г. Наумова (Москва)

ПОДПИСКА
на II полугодие 2006 г.

Каталог агентства «Роспечать» (красно-сине-белого цвета)

Объединенный каталог «Пресса России» (зеленого цвета)

При подписке на 6 месяцев – подарок:

три выпуска Библиотечки «Первое сентября» (серия «Математика»)

МАТЕМАТИКА

Ф. СП-1

Министерство связи
Российской Федерации
"Роспечать"

32030

(индекс издания)

Математика–Первое сентября

наименование издания	Количество комплектов	

на _______ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда ______ (почтовый индекс) ______ (адрес)

Кому ______ (фамилия, инициалы)

ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА

ПВ	место	ли-тер

на газету

32030

(индекс издания)

Математика–Первое сентября

(наименование издания)

Стои-мость	подписки	_______ руб.	Количество комплек-тов	
	пере-адресовки	_______ руб.		

на _______ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда ______ (почтовый индекс) ______ (адрес)

Кому ______ (фамилия, инициалы)

Шеф-редактор С. Островский
И.о. главного редактора Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, П. Чулков, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель ООО «Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя: ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (495)249 3138
Отдел рекламы: (495)249 9870
Редакция газеты «Математика»: тел.: (495)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru