#3

1—15 мая 2006 г.

Электронный информационный спутник газеты «Математика»

Всероссийская олимпиада–2006

С 21 по 26 апреля в древнем Пскове прошел пятый заключительный этап XXXII Всероссийской олимпиады школьников по математике. В Псков съехались более 200 победителей и призеров федерального окружного этапа из 44 регионов России. По традиции в олимпиаде приняли также участие команды Китая и Болгарии.

На открытии олимпиады участников приветствовали представители собрания и администрации Псковской области, учащиеся г. Пскова. От имени жюри участников напутствовал председатель жюри доцент МФТИ Н.Х. Агаханов. Он выразил надежду, что задачи окажутся большинству из них «по зубам», и пообещал ребятам судить жестко и беспристрастно.

В этом выпуске

ВНИМАНИЕ, АНОНС!

Читайте в №10 и №11 газеты «Математика»:

Летний тематический номер .... №10
Вступительные экзамены в МГУ им. М.В. Ломоносова:

В. Алексеев, А. Бегунц, В. Галкин, В. Панферов, И. Сергеев, В. Тарасов
Конкурсная геометрия в МГУ в 2005 г.

Г. Фалин, А. Фалин
Сложные задачи вступительных экзаменов в МГУ

Летний тематический номер............... №11
Тематические планирования и контрольные работы:

Н.Я. Виленкин и др.
Математика, 5-6 классы

Г.В. Дорофеев и др.
Математика, 5-6 классы

С.М. Никольский и др.
Арифметика, 5-6 классы

Ю.Н. Макарычев и др.
Алгебра, 7-9 классы

Нельзя не отметить, что жюри в этом году значительно помолодело — в него вошли семь студентов мехмата МГУ и МФТИ. Они получили это право, приняв активное участие в подготовке задач олимпиады. Все они сами в недавнем прошлом побеждали на всероссийских и международных олимпиадах. Приятно, что ребята продолжают жить в олимпиадном движении уже в новом качестве. Это лишний раз опровергает расхожее мнение, что в олимпиадах участвуют лишь ради преимуществ при поступлении в вуз.

Основное бремя организационных забот, связанных с проведением олимпиады, приняли на себя Псковский областной центр развития одаренных детей и юношества (руководитель — Ю.М. Гулин) и Псковский педагогический комплекс. Олимпиада была организована на хорошем уровне, особая благодарность — за интересную экскурсионную программу.

Каковы же самые яркие впечатления председателя жюри?

— Это победа А. Магазинова по 11-м классам, с абсолютным результатом 56 баллов и отрывом в 14 баллов от следующих участников; победа с абсолютным результатом по 10-м классам Илюхиной Марии (фото справа вверху) и Ивана Митрофанова и, конечно, диплом второй степени по 10-м классам Виктора Омельяненко из г. Белгорода — ученика 7-го (!) класса.

По решению жюри на международной олимпиаде школьников, которая состоится в июле, нашу страну будут представлять: золотой медалист прошлогодней международной олимпиады А. Магазинов (подготовлен В. Дольниковым), ее серебряный призер А. Катышев, П. Затицкий, А. Глазман, Т. Образцов (все подготовлены Д. Карповым) и Р. Девятов (подготовлен Г. Кондаковым и Е. Ивановой).

Ждем хороших результатов!

Л. Рослова

Победители и призеры XXXII Всероссийской олимпиады школьников по математике

11 класс

Диплом I степени

1. Магазинов Александр, г. Ярославль, СОШ № 33 им. К. Маркса.
2. Затицкий Павел, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
3. Глазман Александр, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
4. Девятов Ростивлав, Москва, лицей «Вторая школа».
5. Образцов Тимофей, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.

Диплом II степени

1. Красильников Александр, г. Ульяновск, гимназия № 79.
2. Катышев Алексей, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
3. Баранов Дмитрий, Московская обл., г. Жуковский, гимназия № 1.
4. Есин Алексей, Краснодарский край, ст. Старонижестеблиевская, СОШ № 55.
5. Гусаров Евгений, г. Ярославль, гимназия № 5.
6. Христофоров Михаил, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
7. Дружинин Андрей, г. Иркутск, лицей № 2.

Диплом III степени

1. Еремин Алексей, г. Краснодар, СОШ № 47.
2. Козачок Марина, Московская обл., пос. Долгое, физико-математическая школа № 5.
3. Прасолов Максим, г. Новосибирск, гимназия № 1.
4. Чернов Вадим, г. Челябинск, лицей № 31.
5. Ситников Александр, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
6. Щичко Антон, г. Челябинск, лицей № 31.
7. Столяров Дмитрий, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
8. Иванов Григорий, Ярославская обл., г. Рыбинск, лицей № 2.
9. Куприн Сергей, г. Челябинск, лицей № 31.
10. Музычка Степан, Московская обл., г. Жуковский, школа № 8.
11. Печенкин Николай, Москва, СОШ № 192.
12. Буфетов Алексей, Москва, лицей «Вторая школа».
13. Бяков Леонид, Свердловская обл., г. Нижний Тагил, политехническая гимназия.
14. Смотров Дмитрий, г. Челябинск, лицей № 31.
15. Рябченко Александр, г. Новосибирск, специализированный научно-учебный центр НГУ.
16. Трифонов Иван, Иркутская обл., г. Ангарск, СОШ № 10.

10 класс

Диплом I степени

1. Илюхина Мария, Москва, лицей «Вторая школа».
2. Митрофанов Иван, Московская обл, г. Коломна, гимназия № 2.
3. Арутюнов Владимир, Москва, «Московская гимназия на Юго-Западе» № 1543.
4. Сафин Станислав, г. Краснодар, лицей «ИСТЭК».
5. Матвеев Константин, г. Омск, лицей № 66.
6. Шмаров Владимир, Нижегородская обл., г. Саров, лицей № 15.

Диплом II степени

1. Воробьев Сергей, г. Киров, «Кировский физико-математический лицей».
2. Михайловский Никита, г. Челябинск, лицей № 31.
3. Лишанский Андрей, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
4. Ярушин Дмитрий, г. Челябинск, лицей № 31.
5. Лысов Михаил, Москва, лицей «Вторая школа».
6. Омельяненко Виктор, г. Белгород, лицей № 38.
7. Дроздов Сергей, Санкт-Петербург, лицей «Физико-техническая школа».
8. Чувашов Сергей, г. Киров, «Кировский физико-математический лицей».
9. Хабибрахманов Искандер, Республика Татарстан, г. Казань, лицей-интернат № 2.

Диплом III степени

1. Пономаренко Екатерина, Республика Адыгея, г. Майкоп, гимназия № 22.
2. Шапцев Алексей, г. Пермь, гимназия № 17.
3. Борискин Павел, Нижегородская обл., г. Саров, лицей № 3.
4. Махлин Игорь, Москва, «Московская гимназия на Юго-Западе» № 1543.
5. Шульцева Ольга, г. Курган, гимназия № 27.
6. Сидоров Александр, Санкт-Петербург, лицей «Физико-техническая школа».
7. Пасынков Павел, г. Киров, «Кировский физико-математический лицей».

8. Сеплярская Анна, Московская обл., г. Черноголовка, СОШ № 82 им. Дубовицкого.
9. Локтев Сергей, г. Краснодар, лицей № 90.
10. Баранов Эдуард, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
11. Остроумова Людмила, г. Ярославль, СОШ № 33 им. К. Маркса.
12. Фельдман Григорий, г. Новосибирск, гимназия № 1.
13. Логунов Александр, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
14. Анацкий Анатолий, Республика Саха (Якутия), г. Ленск, лицей № 2.

9 класс

Диплом I степени

1. Кевер Михаил, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
2. Кудык Никита, г. Омск, СОШ № 117.
3. Волков Владислав, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
4. Бойкий Роман, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.

Диплом II степени

1. Ардинарцев Никита, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
2. Бажов Иван, г. Екатеринбург, гимназия № 9.
3. Пешнин Александр, г. Киров, «Кировский физико-математический лицей».
4. Горинов Евгений, г. Киров, «Кировский физико-математический лицей».
5. Архипов Дмитрий, г. Ярославль, СОШ № 33 им. К. Маркса.
6. Харитонов Михаил, Московская обл., пос. Удельная, «Удельнинская гимназия».
7. Поглазов Павел, г. Киров, «Кировский физико-математический лицей».
8. Салихов Камиль, Республика Татарстан, г. Казань, гимназия № 102.
9. Воробьев Илья, Республика Коми, г. Сыктывкар, Коми республиканский физико-математический лицей-интернат.
10. Ерпылев Алексей, Московская обл., пос. Белоозерский, школа № 23.
11. Мазурик Александр, Краснодарский край, г. Анапа, СОШ № 7.
12. Шарахов Сергей, Республика Удмуртия, г. Ижевск, экономико-математический лицей № 29.
13. Сластенин Александр, Санкт-Петербург, СШ № 627.
14. Ненашев Глеб, Санкт-Петербург, физико-математический лицей № 239.
15. Хасанов Тимур, Республика Татарстан, г. Казань, физико-математический лицей № 131.

Диплом III степени

1. Филькин Евгений, Республика Адыгея, г. Майкоп, гимназия № 22.
2. Янушевич Леонид, Москва, школа № 1321 «Ковчег».
3. Корб Дмитрий, г. Омск, СОШ № 117.
4. Распопов Алексей, г. Ростов-на-Дону, физико-математический лицей № 33.
5. Селищев Виталий, Алтайский край, г. Барнаул, СОШ № 17 (лицей «Грани»).
6. Соколов Вячеслав, Санкт-Петербург, гимназия № 261.
7. Титов Иван, г. Екатеринбург, гимназия № 9.
8. Григорьев Сергей, Санкт-Петербург, лицей № 533.
9. Царьков Олег, Москва, лицей «Вторая школа».
10. Кусков Дмитрий, г. Владимир, лингвистическая гимназия № 23 им. А.Г. Столетова.

Экзаменационные работы для проведения письменного экзамена по алгебре и началам анализа за курс средней (полной) школы в 2005/06 учебном году

Утверждено Федеральной службой по надзору в сфере образования и науки от 6 марта 2006 г.

Номер работы	Вариант	Задания 1–5	Задание 6	Задание 7	Задание 8	Задание 9	Задание 10
		Номер варианта в сборнике*	Номер задания в сборнике				
1	I	43	4.1	4.143	5.69	6.16	6.203
	II	47	4.3	4.144	5.70	6.18	6.204
2	I	8	4.61	4.165	5.28	6.108	6.257
	II	14	4.62	4.166	5.32	6.109	6.258
3	I	43	4.5	4.153	5.73	6.19	6.213
	II	78	4.6	4.154	5.75	6.20	6.214
4	I	21	4.41	4.103	5.69	6.118	6.299
	II	90	4.42	4.104	5.70	6.119	6.300
5	I	59	4.39	4.93	5.46	6.105	6.122
	II	84	4.40	4.95	5.48	6.106	6.123
6	I	38	4.61	4.193	5.5	6.110	6.247
	II	62	4.62	4.194	5.6	6.113	6.249
7	I	56	4.117	4.175	5.42	6.109	6.257
	II	70	4.118	4.176	5.44	6.108	6.259
8	I	54	4.153	4.121	5.31	6.106	6.139
	II	86	4.154	4.122	5.32	6.107	6.140
9	I	25	4.39	4.73	5.21	6.16	6.118
	II	96	4.40	4.74	5.22	6.17	6.119
10	I	39	4.1	4.137	5.65	6.16	6.199
	II	84	4.2	4.138	5.66	6.17	6.200
11	I	47	4.33	4.95	5.45	6.99	6.114
	II	78	4.34	4.96	5.47	6.100	6.115
12	I	2	4.121	4.153	5.85	6.83	6.199
	II	42	4.122	4.151	5.87	6.84	6.200
13	I	90	4.145	4.99	5.95	6.108	6.177
	II	94	4.147	4.100	5.96	6.109	6.178
14	I	65	4.93	4.178	5.54	6.47	6.158
	II	77	4.94	4.180	5.55	6.51	6.159
15	I	16	4.89	4.135	5.54	6.58	6.199
	II	22	4.90	4.136	5.55	6.56	6.200
16	I	48	4.149	4.119	5.30	6.105	6.179
	II	86	4.150	4.120	5.31	6.106	6.180
17	I	59	4.36	4.99	5.45	6.103	6.121
	II	78	4.38	4.100	5.47	6.104	6.122
18	I	41	4.5	4.153	5.25	6.8	6.239
	II	53	4.6	4.154	5.26	6.10	6.240
19	I	43	4.2	4.145	5.73	6.17	6.205
	II	59	4.3	4.144	5.74	6.18	6.206
20	I	25	4.36	4.63	5.19	6.15	6.114
	II	73	4.38	4.64	5.20	6.16	6.115
21	I	78	4.41	4.94	5.47	6.106	6.126
	II	84	4.42	4.96	5.48	6.107	6.127
22	I	8	4.70	4.165	5.35	6.114	6.261
	II	70	4.71	4.168	5.36	6.115	6.262
23	I	73	4.41	4.75	5.23	6.16	6.121
	II	96	4.42	4.76	5.24	6.18	6.122

* Экзаменационные задания составлены по «Сборнику заданий для проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс» (авторы Г.В. Дорофеев, Г.К. Муравин, Е.А. Седова; издание 4-е и последующие).

Номер работы	Вариант	Задания 1–5	Задание 6	Задание 7	Задание 8	Задание 9	Задание 10
		Номер варианта в сборнике	Номер задания в сборнике				
24	I	36	4.24	4.99	5.51	6.149	6.247
	II	93	4.26	4.100	5.52	6.150	6.249
25	I	47	4.31	4.93	5.43	6.97	6.112
	II	59	4.32	4.94	5.44	6.98	6.113
26	I	28	4.29	4.98	5.54	6.149	6.255
	II	93	4.30	4.100	5.55	6.150	6.256
27	I	69	4.121	4.199	5.29	6.35	6.197
	II	71	4.122	4.200	5.30	6.38	6.198
28	I	40	4.113	4.171	5.39	6.124	6.272
	II	56	4.114	4.172	5.41	6.125	6.273
29	I	35	4.53	4.137	5.86	6.26	6.153
	II	42	4.54	4.138	5.85	6.27	6.154
30	I	47	4.35	4.96	5.45	6.101	6.118
	II	84	4.37	4.99	5.46	6.102	6.119
31	I	40	4.115	4.173	5.41	6.126	6.169
	II	70	4.116	4.174	5.42	6.127	6.171
32	I	61	4.137	4.95	5.90	6.124	6.163
	II	90	4.138	4.96	5.91	6.125	6.164
33	I	66	4.119	4.198	5.28	6.34	6.195
	II	71	4.121	4.199	5.30	6.39	6.196
34	I	23	4.137	4.131	5.28	6.99	6.163
	II	54	4.138	4.132	5.29	6.100	6.164
35	I	8	4.63	4.165	5.33	6.110	6.258
	II	40	4.64	4.167	5.34	6.113	6.259
36	I	46	4.66	4.195	5.13	6.114	6.255
	II	62	4.67	4.196	5.14	6.115	6.256
37	I	23	4.135	4.131	5.27	6.97	6.161
	II	48	4.136	4.132	5.28	6.98	6.163
38	I	33	4.1	4.143	5.21	6.7	6.237
	II	53	4.3	4.144	5.22	6.10	6.238
39	I	48	4.153	4.133	5.29	6.103	6.177
	II	54	4.154	4.134	5.30	6.104	6.178
40	I	37	4.109	4.179	5.53	6.45	6.118
	II	45	4.110	4.180	5.54	6.46	6.119
41	I	23	4.139	4.107	5.28	6.101	6.169
	II	86	4.140	4.108	5.30	6.102	6.171
42	I	46	4.70	4.195	5.17	6.116	6.242
	II	81	4.71	4.197	5.18	6.117	6.243
43	I	27	4.51	4.153	5.86	6.26	6.203
	II	35	4.52	4.154	5.87	6.25	6.204
44	I	16	4.109	4.139	5.53	6.61	6.205
	II	24	4.110	4.140	5.56	6.62	6.206
45	I	66	4.119	4.197	5.28	6.31	6.193
	II	69	4.120	4.199	5.29	6.33	6.194
46	I	8	4.66	4.166	5.32	6.112	6.259
	II	56	4.67	4.167	5.34	6.113	6.260
47	I	28	4.27	4.96	5.53	6.147	6.247
	II	93	4.28	4.99	5.54	6.148	6.248
48	I	27	4.52	4.155	5.84	6.25	6.205
	II	42	4.53	4.156	5.85	6.26	6.206
49	I	14	4.111	4.169	5.39	6.122	6.271
	II	70	4.112	4.172	5.40	6.123	6.272
50	I	31	4.31	4.137	5.95	6.5	6.213
	II	82	4.32	4.138	5.96	6.10	6.214

Ю. СОЛОВЬЕВ,
Москва

Неравенства

В лекции различными способами доказываются известные, в том числе из школьной программы, неравенства Коши, Йенсена, Коши–Буняковского. Многие утверждения сформулированы в виде упражнений, решения которых приведены в конце лекции. Кроме того, приведен список задач для самостоятельного решения.

Статья представляет собой запись лекции, прочитанной автором 6 октября 2001 г. на Малом мехмате при МГУ им. Ломоносова для школьников 9–11-х классов. Текст опубликован: *Соловьев Ю.П.* Неравенства. — М.: МЦНМО, 2005.

Ю.П. Соловьев (1944—2003) — доктор физико-математических наук, автор многочисленных работ по математике и физике, почти 30 лет проработал на кафедре дифференциальной геометрии механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе математики рассматриваются различные неравенства. Многие из них основаны на очень простом неравенстве — неравенстве о средних, появившемся еще в древние времена:

$$\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}, \qquad (1)$$

где $a,\ b > 0$.

Доказывается оно очень просто.

Упражнение 1. Докажите неравенство (1).

В начале XIX века французский математик Коши занимался обобщением этого неравенства. Самым интересным оказалось следующее обобщение:

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, \qquad (2)$$

где $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n > 0$.

Несложно доказать это неравенство для трех, четырех или пяти чисел, но дальше, если рассматривать отдельно каждое n, придется очень повозиться.

Упражнение 2. Докажите неравенство (2) для $n = 4$.

Подсказка. Сведите неравенство (2) к неравенству (1), объединив слагаемые и множители в пары.

Упражнение 3. Докажите неравенство (2) для $n = 2m$, предположив, что оно верно для $n = m$.

Упражнение 4. Докажите, что если в неравенстве (2) заменить a_n на среднее арифметическое чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}$, то получится то же неравенство (2), только для количества чисел, равного $n - 1$.

Неравенство (2) было доказано в общем виде для произвольного n с большим трудом и имеет свое имя — неравенство Коши. Его также называют неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим. В книгах можно найти разные его доказательства, но многие из них трудные. В них требуется помнить много деталей. Мы же рассмотрим несколько очень простых способов, с помощью которых можно, кроме того, получить много частных неравенств и решить много задач. Первая часть будет посвящена этим доказательствам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КОШИ

Прежде всего нам необходимо познакомиться с одним широко известным и очень важным методом доказательства, на случай, если кто-либо из читателей с ним не знаком, — это метод математической индукции.

Метод математической индукции

Пусть есть утверждение, содержащее натуральное число n. Пусть также выполняются следующие условия.

1. *База индукции*: утверждение выполняется для $n = 1$.

2. *Шаг индукции*: для любого n из того, что утверждение выполняется для n, следует, что оно выполняется для $n + 1$. Предположение того, что утверждение верно для n, называется *предположением индукции*.

Тогда, согласно принципу математической индукции, утверждение верно для всех $n \geq 1$.

Метод математической индукции тем и хорош, что позволяет провести доказательство в общем виде, не рассматривая отдельно каждое n. Конечно, это не единственный способ провести доказательство в общем виде, но очень часто хорошо срабатывает именно он.

Упражнение 5. Докажите, что неравенство (2) верно для любых n, представимых в виде 2^k, где k — натуральное число.

Подсказка. Примените метод математической индукции и используйте результат упражнения 3.

Упражнение 6. Докажите, что если неравенство (2) верно для некоторого m, то оно верно и для любого $n < m$.

Подсказка. Примените метод математической индукции «вниз», использовав результат упражнения 4.

Первое доказательство

Упражнения 5 и 6 составляют наше первое доказательство неравенства Коши для произвольного n. Действительно, для любого натурального n всегда существует такое натуральное k, что $2^k > n$. А утверждение упражнения 5, основанное на упражнениях 1 и 2, состоит в том, что неравенство (2) верно для количества слагаемых, равного 2^k, где k — любое натуральное число. Тогда, в силу утверждения упражнения 6 (m следует положить равным 2^k), основанного на упражнении 4, получаем, что неравенство верно для нашего n, так как число n меньше 2^k в силу выбора k. Если кому-то не удалось самостоятельно проделать все упражнения, то их решения следует посмотреть в конце лекции.

Второе доказательство

Прежде всего, давайте для краткости предполагать далее, что все введенные и вводимые числа положительны. Заменим наши переменные таким образом:

$$y_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}},\ y_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}},\ \ldots,$$

$$y_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}. \qquad (3)$$

Тогда неравенство (2) примет вид

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n \geq n, \qquad (4)$$

где имеет место условие

$$y_1y_2\ldots y_n = 1. \qquad (5)$$

В самом деле, условие (5) появилось от того, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — это уже не произвольные положительные числа, а только те, которые представимы в виде (3). Легко видеть, что для любых чисел, представимых в виде (3), выполнено условие (5), и любые положительные числа, удовлетворяющие условию (5), представимы в виде (3).

Итак, иными словами, в неравенстве Коши утверждается, что из (5) следует (4). Кстати, обратное, конечно, неверно.

Проведем доказательство по индукции. Наше утверждение, зависящее от n, — это утверждение о том, что из (5) следует (4).

База индукции. Очевидно, что в нашем случае она верна, так как при $n = 1$ утверждение принимает вид «из $y_1 = 1$ следует $y_1 \geq 1$».

Шаг индукции. Докажем, что из верности утверждения для n следует его верность для $n + 1$, то есть докажем, что если для произвольных n чисел из (5) следует (4), то для произвольных $n + 1$ чисел из (5), принимающего вид

$$z_1z_2\ldots z_nz_{n+1} \geq 1, \qquad (5')$$

следует (4), принимающее вид

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + z_{n+1} \geq n + 1, \qquad (4')$$

где в (4′) и (5′) положено

$$z_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}},\ z_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}},\ \ldots,$$

$$z_n = \frac{a_n}{\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}},\ z_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}}.$$

Доказательство шага. Числа $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ удовлетворяют условию

$$z_1z_2\ldots z_{n+1} = 1.$$

Положим

$$z_1 = y_1,\ z_2 = y_2,\ \ldots,\ z_{n-1} = y_{n-1},\ z_nz_{n+1} = y_n.$$

Тогда очевидно верно условие (5). По предположению индукции из него следует неравенство (4), которое в силу наших новых обозначений имеет вид

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1} + z_n z_{n+1} \ge n. \qquad (6)$$

В шаге нужно доказать, что

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + z_{n+1} \ge n + 1. \qquad (7)$$

Итак, далее будем предполагать, что не все z_i равны единице, так как иначе все тривиально доказывается. В самом деле, сумма $n + 1$ слагаемых, равных единице, равна $n + 1$, и условие (7) заведомо выполнено. Так что по крайней мере пара чисел не является парой единиц. Более того, заметим, что тогда есть пара чисел, одно из которых больше единицы, а другое меньше. Просто иначе невыполнимо условие равенства произведения всех чисел единице. Перенумеруем числа z_i так, чтобы этой парой оказались два последних числа $z_n > 1$ и $z_{n+1} < 1$. Обратите внимание, что мы ничего не считаем, только переобозначаем переменные, и сейчас это удивительное доказательство «вылезет» из неравенства, которое выглядит так:

$$z_n + z_{n+1} - z_n z_{n+1} > 1. \qquad (8)$$

Упражнение 7. Докажите, что (8) следует из условий $z_n > 1$, $z_{n+1} < 1$.

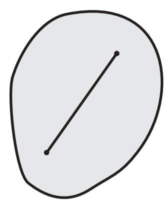
Осталось сложить неравенство (8) с неравенством (6), и мы получили (7), а значит, и доказательство шага индукции. Доказательство неравенства Коши для произвольного n тем самым завершено.

То, чему вы должны научиться больше, чем конкретным фактам, — хранить математическую информацию. Почему-то ни в школе, ни в университетах обычно этому не учат. Дело в том, что человеческая память устроена так, что человек просто не в состоянии запомнить три тысячи теорем явным текстом. Даже если память очень хорошая — вдруг знак забыл, перепутал... и толку с этих знаний никакого. Возьмете неверную формулу — и все пропало. Поэтому важно не держать в голове лазерный диск с голыми формулами. Важны другие способы хранения информации в голове. Такие, чтобы можно было ее получать в нужный момент и гарантированно верно, и желательно еще и быстро. Вот, в частности, это доказательство очень мощного неравенства Коши именно такое. Его не страшно забыть в деталях, так как в нем нет ничего трудного. Прелесть науки в том и состоит, чтобы находить такой угол зрения, под которым все становится просто. Наиболее важно в школьные годы суметь организовать все знания (формулы, теоремы) подобным образом, найдя этот простой подход, потому что тогда их нельзя потерять или забыть.

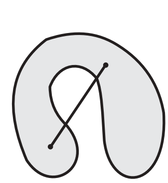
НЕРАВЕНСТВО ЙЕНСЕНА

Итак, мы доказали неравенство Коши. Из него можно получить огромное количество других задач. А теперь рассмотрим еще одно очень мощное неравенство — неравенство Йенсена. Оно тоже очень просто доказывается, но посвежее, ему примерно сто лет.

Прежде всего введем несколько новых обозначений.



а)



б)

Рис. 1

Определение. Множество называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий любые две его точки, сам целиком содержится на множестве (на рис. 1,*а* показан пример выпуклого множества, а вот множество, показанное на рис. 1,*б*, выпуклым не является).

Пусть имеется функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале. У каждой функции имеется график. График функции, определенной на всей числовой прямой, разбивает плоскость на два множества: $y \ge f(x)$ и $y < f(x)$. Такие два множества называются надграфик и подграфик.

Определение. Пусть $f(x)$ определена на некотором интервале. Тогда множество $y \ge f(x)$, где x принадлежит интервалу, называется *надграфиком* (рис. 2), а множество $y < f(x)$, где x принадлежит интервалу, — *подграфиком* (рис. 3).

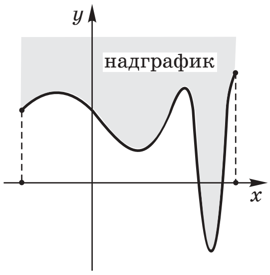


Рис. 2

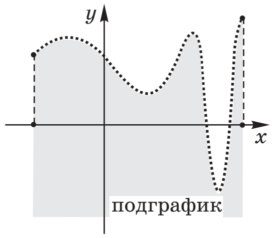


Рис. 3

Слова ужасные, но любого человека спроси — ему будет ясно, что имеется в виду. Кстати, совершенно неважно, куда отнести саму кривую. Мы, например, отнесли ее к надграфику.

Определение. Функция называется *выпуклой* на некотором интервале, если ее надграфик на этом интервале выпуклый, и *вогнутой*, если выпуклым является подграфик.

Пример 1. Парабола $y = x^2$ — выпуклая на всей числовой оси функция (рис. 4).

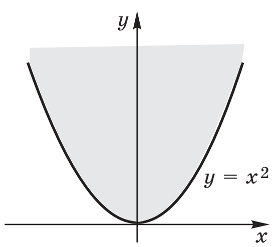


Рис. 4

Упражнение 8. Докажите это.

Пример 2. Функция $y = \dfrac{1}{x}$ на полупрямой $x < 0$ — вогнутая (рис. 5).

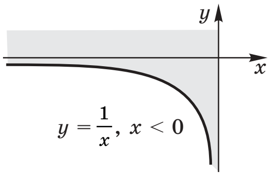


Рис. 5

Пример 3. На всей числовой оси синусоида, любой многочлен нечетной степени больше единицы и гипербола не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми (рис. 6–8).

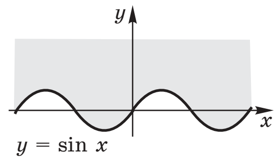


Рис. 6

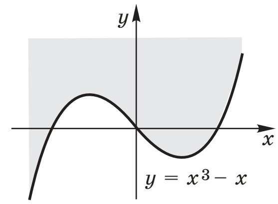


Рис. 7

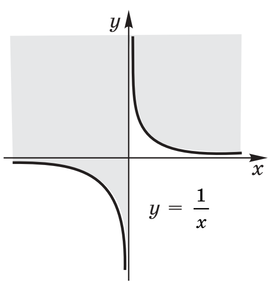


Рис. 8

Упражнение 9. Приведите пример функции, являющейся одновременно и выпуклой, и вогнутой.

Замечание. Функцию, согласно нашему определению, являющуюся выпуклой, еще называют *выпуклой вниз*, а функцию, являющуюся вогнутой, — *выпуклой вверх*. Такие названия были даны им в XIX в. и сейчас сохранились только в математических кружках, а в университетских курсах их называют наоборот: выпуклая вниз функция — вогнутая, выпуклая вверх — выпуклая.

Теорема Йенсена

Теорема. Пусть $y = f(x)$ — функция, выпуклая на некотором интервале; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые числа из этого интервала; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ —

положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда выполняется неравенство Йенсена

$$f(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n) \le$$
$$\le m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \dots + m_nf(x_n). \qquad (9)$$

Из этого неравенства можно получить важнейшие неравенства, которые знает современная математика. Для доказательства нам понадобится один чисто математический факт, который обычно в школе не освещают.

Центр масс

Предположим, что с каждой точкой плоскости связано некоторое число, которое будем называть «массой» этой точки («масса» не обязательно должна быть положительной). Тогда можно определить «центр масс» двух точек.

Определение. *Центром масс* двух точек A и B будем называть такую точку C на отрезке AB, что $\frac{AC}{BC} = \frac{m_B}{m_A}$, где m_A и m_B — массы точек A и B соответственно.

Это и есть знаменитое правило рычага. В XVIII в. люди пытались его доказать, но оказывается, оно эквивалентно пятому постулату Евклида[1].

Декартовы координаты точки C выражаются через координаты точек A и B очень просто:

$$x_C = \frac{m_Ax_A + m_Bx_B}{m_A + m_B},\ y_C = \frac{m_Ay_A + m_By_B}{m_A + m_B}.$$

Кстати, видно, что обе координаты точки C выражаются одинаково. Легко обобщить это определение до определения центра масс системы точек. Действительно, центр масс трех точек определим как центр масс центра масс первых двух точек и третьей. В координатах это выглядит так:

$$\begin{cases} x_C = \left(\dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}(m_1 + m_2) + m_3x_3\right)\dfrac{1}{(m_1 + m_2) + m_3} = \\ = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ y_C = \left(\dfrac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}(m_1 + m_2) + m_3y_3\right)\dfrac{1}{(m_1 + m_2) + m_3} = \\ = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{cases} \qquad (10)$$

Легко проверить, что от порядка, в котором берутся точки, положение центра масс не зависит, так как от него не зависит получаемое выражение для координат точки.

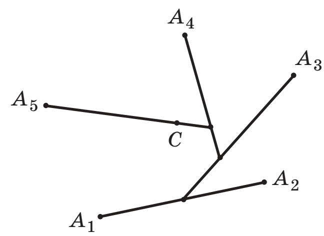


Рис. 9

Упражнение 10. Убедитесь, что это действительно так.

Поэтому ясно, что центр масс C системы n точек будет определяться следующими выражениями для его декартовых координат (рис. 9):

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Лемма. Пусть имеется выпуклая фигура и внутри ее взяты n точек. Тогда центр масс этих точек тоже принадлежит фигуре.

Доказательство проведем по индукции.

Докажем *базу*: центр масс двух точек по определению принадлежит соединяющему их отрезку, который, в силу выпуклости фигуры, принадлежит фигуре.

База доказана, теперь *шаг индукции*. Центр масс $n + 1$ точек — это, в силу определения, центр масс двух точек: любой одной и центра масс всех остальных, которых n штук. В силу предположения индукции центр масс этих остальных n точек принадлежит фигуре, а значит, центр масс его и $(n + 1)$-й точки тоже принадле-

[1] Пятый постулат Евклида (или аксиома о параллельных) гласит, что через точку вне прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной. В течение более чем двух тысячелетий предполагали, что аксиоматика Евклида (включающая в себя и пятый постулат) не является независимой, что пятый постулат можно доказать, основываясь на других аксиомах этой аксиоматики. Но в XIX в. сразу несколько математиков (среди которых Лобачевский, Гаусс и Бойаи) почти одновременно показали, что доказать его невозможно. Так родилась новая, неевклидова геометрия.

жит фигуре, так как по определению лежит на отрезке, соединяющем эти две точки нашей выпуклой фигуры. Лемма доказана.

Доказательство теоремы Йенсена

Рассмотрим функцию из условия теоремы. На графике возьмем точки, у которых абсциссы имеют значения x_1, x_2, ..., x_n, и обозначим эти точки через A_1, A_2, ..., A_n (рис. 10). Возьмем для этих точек совершенно произвольные массы m_1, m_2, ..., m_n, сумма которых равна 1. Согласно условию, наша функция выпуклая, и значит, надграфик — выпуклое множество. Тогда центр масс точек A_1, A_2, ..., A_n тоже является точкой надграфика. Выпишем координаты центра масс и условие того, что он принадлежит надграфику:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} =$$

$$= m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n,\ y_C =$$

$$= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} =$$

$$= m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \ldots + m_nf(x_n),$$

$$y_C \ge f(x_C). \qquad (11)$$

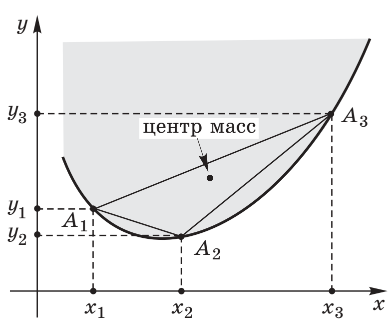


Рис. 10

Теперь подставим в уравнение (11) координаты центра масс и получим неравенство (9) теоремы Йенсена. Оказывается, что неравенство Йенсена — это всего лишь утверждение о том, что центр масс точек графика выпуклой функции лежит в надграфике!

ПРИМЕРЫ

Возникает вопрос, о котором стоило бы поговорить отдельно: как определить, является ли некоторая функция выпуклой? Многие из вас знают, что если задана функция, то выпуклость проверить можно так: если вторая производная на интервале не меньше нуля, то функция на этом интервале выпуклая, а если не больше нуля, то она вогнутая.

Вывод неравенства Коши из неравенства Йенсена

Оказывается, неравенство Коши несложно выводится из неравенства Йенсена. Мы уже доказали неравенство Коши, даже двумя способами. Можете в книгах посмотреть, какое оно там сложное бывает, это доказательство. А сейчас мы докажем его еще проще! Давайте просто прологарифмируем неравенство (2). Обе части положительные, а логарифм во всей области своего определения — возрастающая функция, поэтому получим эквивалентное неравенство

$$\log\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \log\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Логарифм произведения — это сумма логарифмов, а степень можно вынести как множитель:

$$\log\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge$$

$$\ge \frac{1}{n}\log a_1 + \frac{1}{n}\log a_2 + \ldots + \frac{1}{n}\log a_n.$$

А это и есть неравенство Йенсена для логарифма, который является вогнутой функцией в своей области определения в силу того, что его вторая производная везде в этой области отрицательна. Так как полученное неравенство Йенсена верно и является эквивалентным исходному, то исходное неравенство Коши тоже верно. Все, это и есть доказательство.

Вывод неравенства Коши–Буняковского из неравенства Йенсена

Еще одно неравенство, которое появилось в XIX в., — это неравенство Коши–Буняковского. Оно выглядит так:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \le n\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right). \qquad (12)$$

В «лоб» доказать и не мечтайте. Докажем его, используя неравенство Йенсена. Доказательство основано на том, что $y = x^2$ — функция выпуклая (см. упражнение 8). Запишем для нее неравенство Йенсена, положив $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = \frac{1}{n}$:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 \le \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}.$$

А теперь если мы умножим обе части на n^2, то и получится как раз неравенство (12)!

Получилось, что неравенство Коши–Буняковского — это тривиальное следствие неравенства Йенсена.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите следующие неравенства (**11–22, 25–27**).

11. $x_1 \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \le x_n$, где $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

12. $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \ge \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 1$, $n \ge 2$.

13. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, где $a, b > 0$.

14. $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le$

$\le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

15. $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

16. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

17. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, где n — натуральное число.

18. $|\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)| \le$

$\le |\sin x_1| + |\sin x_2| + \ldots + |\sin x_n|$,

где $0 \le x_1 \le \pi$, $0 \le x_2 \le \pi$, ..., $0 \le x_n \le \pi$.

19. $a_1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n \le n a_1 a_2 \ldots a_n$, где $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge 1$.

20. $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$, где n — натуральное число, $n \ge 3$.

21. $\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n}{n} \le \sin\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, где $0 \le x_1 \le \pi$, $0 \le x_2 \le \pi$, ..., $0 \le x_n \le \pi$.

22. $\frac{m^p}{p} + \frac{n^q}{q} \ge mn$, где $m, n, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

23. Докажите, что для всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

24. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный.

25. $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 \ge \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}$, где $a, b \ge \frac{1}{2}$.

26. $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \ge x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.

27. $\left(\frac{x_1^a + x_2^a + \ldots + x_n^a}{n}\right)^{\frac{1}{a}} \le \left(\frac{x_1^b + x_2^b + \ldots + x_n^b}{n}\right)^{\frac{1}{b}}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $a < b$.

Решение упражнений

1. Это неравенство является простым следствием неотрицательности квадрата разности чисел $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \ge 0.$$

2. Объединяем слагаемые в пары a_1, a_2 и a_3, a_4, а затем для каждой из них применим неравенство Коши для $n = 2$:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}, \quad \frac{a_3 + a_4}{2} \ge \sqrt{a_3 a_4}.$$

Используем эти два неравенства и еще раз неравенство Коши для $n = 2$:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \ge$$

$$\ge \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \ge \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

3. Решается аналогично упражнению 2, только вместо сведения к неравенству Коши для $n = 2$ нужно сводить к неравенству Коши для $n = m$.

4. Рассмотрим левую часть, то есть среднее арифметическое. Ясно, что среднее арифметическое n чисел равно среднему арифметическому себя и этих же n чисел. Это все равно, что к системе точек добавить в ее центр масс еще одну точку и снова рассчитать центр масс, который, естественно, не сдвинется. Подставьте и убедитесь. Теперь осталось возвести все в степень n, разделить на сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ и извлечь корень $(n-1)$-й степени.

5. Доказательство индукцией по k. База индукции ($k = 1$) — это уже доказанное в упражнении 1 неравенство Коши для $2^k = 2^1 = 2$ чисел. А шаг индукции — уже доказанное утверждение упражнения 3, которое позволяет перейти к неравенству Коши для 2^{k+1} чисел, если для 2^k чисел оно уже доказано.

6. Что такое метод математической индукции «вниз»? Очень просто! Если в шаге доказывать, что из предположения индукции следует верность высказывания не для $n + 1$, а для $n - 1$, то высказывание окажется верным для всех n не больших, а меньших базового. Таким образом, для решения данного упражнения нужно всего лишь доказать этот шаг «вниз». Заметим, что именно он и был доказан в упражнении 4.

7. Умножим обе части неравенства $z_n > 1$ на положительное число $1 - z_{n+1}$. Получим:

$$z_n - z_n z_{n+1} > 1 - z_{n+1}.$$

Перенеся слагаемое $(-z_{n+1})$ в левую часть с переменой знака, получим искомое неравенство (8).

8. Вот как можно доказать выпуклость функции $y = x^2$, не используя производных.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ на параболе (рис. 11), в виде

$$y - y_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$$

и сложим с ним неравенство $x^2 - y < 0$, которое нам необходимо доказать для всех x из интервала $(x_1; x_2)$:

$$x^2 - y_1 < \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1).$$

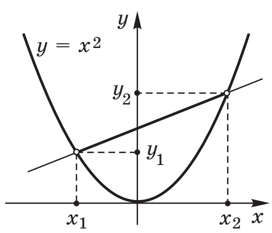


Рис. 11

Если мы докажем это неравенство, это будет означать, что указанный отрезок прямой полностью лежит выше параболы, то есть весь принадлежит подграфику, что, в свою очередь, будет означать его выпуклость. Итак, разделим полученное неравенство на $x - x_1$:

$$\frac{x^2 - y_1}{x - x_1} < \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Осталось подставить вместо y_1 и y_2 соответствующие значения $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, а затем сократить полученные дроби на разности $x - x_1$ и $x_2 - x_1$. Получим:

$$x + x_1 \le x_2 + x_1.$$

Это очевидно верное неравенство, которое в силу наших преобразований является эквивалентным исходному. Утверждение доказано.

9. Прямая является выпуклой и вогнутой одновременно. Этот пример очень хорош, потому как иллюстрирует, что почти в любых определениях существуют предельные моменты. Кстати, можно доказать, что других одновременно и выпуклых, и вогнутых функций нет.

10. Докажем это утверждение по индукции. База для одной точки очевидна, потому что одну точку мы можем брать только в одном порядке. Теперь докажем шаг индукции. Пусть для n точек мы уже доказали, что независимо от порядка, в котором мы берем точки для вычисления координат центра масс, все равно получаются выражения наподобие (10), то есть

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Теперь попробуем доказать то же самое для произвольных $n + 1$ точек. Выберем произвольный порядок, в котором мы будем брать точки для вычисления координат центра масс. Без ограничения общности будем считать, что последней добавляется точка $(x_{n+1}; y_{n+1})$ (это означает, что такого можно добиться простой перенумерацией точек). Таким образом, центр масс всей системы из $n + 1$ точек совпадает с центром масс системы двух точек — точки массы m_{n+1} с координатами $(x_{n+1}; y_{n+1})$ и точки массы $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ с координатами

$$\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}\right)$$

(эту вторую точку мы получаем по определению индукции). Мы уже знаем, что центр масс системы из этих двух точек имеет координаты

$$x_C = \frac{\dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + x_{n+1}m_{n+1}}{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + m_{n+1}},$$

$$y_C = \frac{\dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + y_{n+1}m_{n+1}}{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) + m_{n+1}}.$$

А именно это и нужно было доказать в шаге индукции. Поскольку мы с самого начала взяли произвольный порядок выбора точек, то формулы будут верны в любом случае, а значит, они не зависят от порядка выбора точек. Что и требовалось.

Про календарь и треугольники

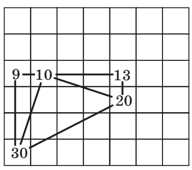
Задача. Наташа сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Наташа предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Наташа?

Решение. Наташа права. Всего существует 7 различных вариантов расположения дат в январском календаре (в зависимости от того, каким днем недели будет 1 января). При этом существует всего три существенно различных ситуации расположения чисел 10–20–30 (см. первые три рисунка), остальные получаются из первых двух горизонтальными сдвигами треугольника.

						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						



Проверим Наташино предположение для первого случая, а для второго случая рассуждения будут аналогичными. Очевидно, что у треугольника 30–9–10 угол 9 прямой (см. четвертый рисунок), и, аналогично, является прямым угол 13 у треугольника 10–13–20. Ясно, что стороны 9–30 и 10–13 равны; аналогично равны стороны 9–10 и 13–20. Поэтому треугольники 9–30–10 и 13–10–20 равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, отрезки 10–30 и 10–20 равны. Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, получаем, что сумма острых углов в треугольнике 9–10–30 равна

$$180° - 90° = 90°.$$

Осталось заметить, что сумма углов, дополняющих угол 10 до развернутого угла, равна сумме острых углов треугольника 9–10–30. Значит, угол 10 тоже равен 90°. Итак, треугольник 10–20–30 является равнобедренным прямоугольным.

Эта задача была предложена школьникам 7-го класса на Математическом празднике в 2006 году.

Всегда трудно подобрать хорошую геометрическую задачу для семиклассников (тем более на доказательство!). При этом важно находить еще и такие задачи, которые школьникам хотелось бы решать. Попробуйте предложить задачу про календарь детям, которые устали от стандартных задач на признаки равенства треугольников. Вы увидите, что даже самые ленивые с интересом начнут измерять углы и отрезки, а дальше доказывать, что треугольник является прямоугольным и равнобедренным.

Решив задачу, можно продолжить ее исследование. Например, можно достроить треугольник до квадрата и посмотреть, в какую клеточку попадет четвертая вершина. Можно также сделать «календарь» на год — пронумеровать все дни года числами от 1 до 365 — и изучить, как расположены числа, кратные десяти.

Н. Нетрусова

Внимание, конкурс!

Редакция газеты «Математика» объявляет конкурс фотографий «Лето–осень-2006». На конкурс принимаются фотографии, на которых запечатлены учителя математики и их ученики 5–11-х классов в учебном процессе, на занятиях кружка, олимпиадах, в летних математических школах и пр. К каждой фотографии необходимо приложить краткое описание изображенного на ней события (место, время, действующие лица).

Фотографии могут быть цветными или черно-белыми. Формат для фотографий, отпечатанных на фотобумаге, не менее 10 × 15 см. Цифровые фотографии могут быть присланы на электронном носителе или по электронной почте. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат — JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, — высокое (*high*).

Лучшие фотографии будут напечатаны в газете, а победитель получит бесплатную подписку на первое полугодие 2007 года.

Шеф-редактор С. Островский
И.о. главного редактора Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, П. Чулков, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель ООО «Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя: ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (495)249 3138
Отдел рекламы: (495)249 9870
Редакция газеты «Математика»: тел.: (495)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru