#6

1—31 октября 2006 г.

Электронный информационный спутник газеты «Математика»

С праздником, дорогие коллеги! С Днем учителя!

Что можно пожелать учителю? Конечно, хороших учеников. Смышленных и любознательных, трудолюбивых и усидчивых. Да еще чтобы сразу все эти замечательные качества были в каждом из них. Нереально? Наверное. Но разве не от учителя зависит, чтобы они с радостью бежали на уроки, не уставая решали задачи, чтобы все у них получалось и сходилось с ответом? Перефразируя известную фразу о народе и правительстве, хочется сказать: учитель имеет тех учеников, которых он достоин. Так что же надо делать, чтобы быть достойными этих непослушных, задиристых непосед, забывающих выполнить домашнее задание (были дела поважнее), задающих неудобные вопросы (а вдруг учитель не ответит!), сбегающих с уроков (жизнь-то, оказывается, кипит и за пределами школы!)? Но чем труднее нам с ними приходится, тем дольше мы их помним и больше любим. Или, быть может, свои педагогические достижения, в них воплощенные?

Наши пожелания успехов в вашей профессиональной деятельности мы хотим подкрепить новыми выпусками нашей газеты. До конца 2006 года осталось 5 номеров. Вот их темы:

№ 20. Сказки на уроках математики;

№ 21. Открытый урок;

№ 22. Неделя математики;

№ 23. Анализ результатов экзаменов;

№ 24. Дидактические игры.

А в новом, 2007 году планируются новые проекты:

— «Мастер-класс» — открытые уроки ведущих учителей математики с авторскими методическими комментариями;

— специальный выпуск о профильном обучении (№ 2/2007): элективные курсы, концепции профильных учебников, обзор учебной литературы, региональный опыт и др.;

— выпуск, посвященный 300-летию Л. Эйлера;

— летние тематические выпуски: летние (выездные) школы, математический кружок, вступительные экзамены, программы элективных курсов и др.;

— второй заочный творческий конкурс учителей математики;

— курс лекций «Вероятность и статистика в курсе математики общеобразовательной школы» в педагогическом университете «Первое сентября»;

— конкурс «Учитель с фотоаппаратом».

И новые брошюры: «Игры на уроках математики», «Устный счет»...

Мы верим, что все это многообразие методических и математических идей поможет вам сделать уроки яркими и запоминающимися, а вашу жизнь содержательной и интересной.

Л. Рослова

В ЭТОМ ВЫПУСКЕ

Лента новостей
В. Арнольд
Поздравляем лауреатов! .... 2—3

Предлагаю коллегам
С. Гусева
Сказки про аксиомы геометрии .... 4—10

Л. Черкасова
«Сердце» задачи .... 11—12

ВНИМАНИЕ, АНОНС!

Читайте в № 20 и № 21 газеты «Математика»:

Страничка психолога
В. Арсланьян
Классы коррекции: за и против .... № 20
Взгляд психолога на коррекционно-развивающее обучение

Математическая школа
В. Вавилов, М. Колоскова
Уроки в цветущем саду .... № 20
Практические работы по геометрии во дворе школы им. А.Н. Колмогорова

Предлагаю коллегам
Е. Арутюнян, Г. Левитас
Мышкина тропинка .... № 20
Сказка о боязливой Мышке, которая хотела бегать только по тропинке-биссектрисе

Открытый урок
И. Ромашко
Как подготовить и провести открытый урок .... № 21
Подробно описана технология проведения открытого урока

Предлагаю коллегам
С. Дворянинов
Антонимы в математике .... № 21
Об особенностях употребления частицы «не» в математическом языке

Экзамены
М. Потапов, А. Шевкин
Несколько замечаний по критериям оценивания работ ЕГЭ .... № 21
Приводятся примеры заданий экзамена, которые имеют несколько способов решения, и ставится вопрос: как оценивать решения, не предусмотренные разработчиками ЕГЭ?

В. АРНОЛЬД,
Москва

Поздравляем лауреатов!

Традиция наиболее престижных международных научных премий берет свое начало от Нобелевских премий, присуждаемых ежегодно по шести номинациям: за достижения в физике, химии, медицине (или физиологии), литературе, экономике и международная премия Мира. Математики в этом списке нет. Но в XX веке в математике сложилась своя «табель о рангах» в международных научных премиях.

Решение об учреждении самой престижной математической премии — Филдсовской было принято в 1924 году на Международном математическом конгрессе в Торонто. Председателем конгресса в тот год был канадский математик Джон Чарльз Филдс. Именно он высказал предложение о премии, единодушно поддержанное участниками. Умирая, он завещал все свои деньги для создания фонда, из которого будут присуждаться премии. В его память премия и получила свое имя.

Премия присуждается раз в четыре года, ее лауреаты объявляются на открытии очередного международного математического конгресса. Специальный комитет по присуждению премии избирается Исполнительным комитетом Международного математического союза (и обычно возглавляется его президентом). Имя и координаты руководителя комитета объявляются широко, но его состав держится в секрете до момента объявления лауреатов. Комитет просят назвать по крайней мере двоих, но гораздо предпочтительнее четверых лауреатов, представляющих все разнообразие областей математики. При этом кандидату должно быть меньше 40 лет на 1 января того года, в котором ему присуждается премия. Первый раз премия была присуждена на конгрессе в Осло в 1936 году, следующий конгресс состоялся только в 1950 году в США, с тех пор премия неизменно присуждалась раз в четыре года. Российская математика всегда стояла высоко: из 40 премий, врученных в 1936–2002 гг., шесть получили наши соотечественники —

С. Новиков (1970), Г. Маргулис (1978), В. Дринфельд (1990), Е. Зельманов (1994), М. Концевич (1998) и В. Воеводский (2002). В комитет по присуждению премии, состоящий обычно из 8–9 человек, наши соотечественники избираются почти всегда (кроме

1994), а трижды комитет возглавляли Я. Синай (2002), Ю. Манин (1998) и Л. Фаддеев (1990).

Помимо медали, лауреат получает премию. Первоначально размер премии составлял 1500 канадских долларов. В настоящее время ее размер достиг 15 тысяч канадских долларов. Филдсовская медаль изготовляется из золота, на лицевой стороне медали помещено изображение Архимеда и приписываемая ему фраза на латыни: «Превзойти человеческие возможности и познать Вселенную». А на обороте надпись: «Математический мир приветствует шаг к Познанию».

22 августа 2006 г. в Мадриде начал работу международный математический конгресс. На церемонии открытия было объявлено о присуждении Филдсовской премии 2006 г. В этом году впервые лауреатами стали сразу два российских математика — Андрей Окуньков и Григорий Перельман. По официальному сообщению, А. Окуньков удостоен премии «за свои достижения, соединяющие теорию вероятностей, теорию представлений и алгебраическую геометрию», а Г. Перельман — «за свой вклад в геометрию и революционные достижения в понимании аналитической и геометрической структуры потока Риччи».

К сожалению, в последние недели в российских и зарубежных СМИ присуждение Филдсовской премии Г. Перельману часто путается с возможным рассмотрением вопроса о получении им премии в миллион долларов, объявленной Clay Institute за доказательство гипотезы Пуанкаре. По нашим сведениям, комиссия по присуждению этой премии пока даже не назначена. От принятия Филдсовской медали Г. Перельман отказался.

Также Филдсовской премии удостоены Теренс Тао (Австралия), проф. University of California, и Венделин Вернер (Франция), проф. Ecole Normale Superieure. На церемонии открытия Конгресса объявлено, что премия Неванлинны присуждена профессору Cornell University (США) Джону Клейнбергу, а присуждаемой впервые премии Гаусса удостоен 90-летний японский профессор Киёси Ито.

Я стараюсь увидеть мир так, как его видят физики

Интервью с Андреем Окуньковым в день присуждения ему Филдсовской премии 22 августа 2006 г.

А. Окуньков родился в Москве в 1969 г. и защитил диссертацию в родном городе. Сейчас он профессор теории представлений в Принстонском университете (Нью-Джерси, США). Его работы нашли приложения во многих областях как математики, так и физики. Благодаря такой многосторонности, исследования А. Окунькова получили поддержку фондов Слоэна (2000 г.) и Паккарда (2001 г.), а в 2004 г. он был удостоен престижной премии Европейского математического общества.

Возможно, это стандартный вопрос, но мы обязаны его задать: что Вы чувствуете, будучи награждены Филдсовской медалью? Как Вы узнали об этом?

Среди моих мыслей, возникших после телефонного звонка от президента Международного союза математиков, были две. Во-первых, награждение — большая честь, которая означает и большую ответственность. Временами я чувствую, что ошеломлён тем и другим. Во-вторых, я должен немедленно разделить достигнутое признание с моими друзьями и коллегами. Математика требует одновременно индивидуальных и коллективных усилий: хотя идея рождается в одной голове, для прогресса столь же важен обмен идеями. Мне посчастливилось работать со многими блестящими математиками, которые стали и моими близкими друзьями. Это наш общий успех.

Ваши работы, насколько я понимаю, связывают несколько областей математики. Такие связи возникают неожиданно или Вы заранее знаете, где искать решение?

Любое математическое доказательство обязательно включает нечто новое, что не присутствовало в постановке задачи. Иначе оно было бы чем-то очевидным или рутинным. Обычно в поисках не требуется заходить слишком далеко. Но бывает, что действительно нужна идея из совершенно иной области математики, как экзотическая приправа. Я всегда испытываю большую радость, когда такое случается — это добавляет красоты доказательству.

Приходится ли Вам глубоко изучать эту науку, тесно сотрудничать с физиками или обычно Вы «безоглядно» посвящаете себя математике, а потом находятся физики, применяющие Ваши результаты в своих исследованиях?

Несомненно, мои исследования многим обязаны физике. Относительно полезности в обратном направлении не уверен; во всяком случае, не мне судить. Нет, я не взаимодействую с физиками «закрыв глаза», я очень стараюсь научиться видеть мир так, как они его видят. Когда нет стопроцентных шансов на успех, очень важно вдохновение, которое дает мне физика. Математика и физика происходят из одного корня, и часто обсуждается их взаимосвязь, иногда сложная. Но мне ясно одно: физика порождает прекрасные математические задачи, а иногда даже подсказывает, как их решать.

Каково нынешнее состояние математических исследований в России?

Я считаю для себя большим счастьем быть последователем московской математической традиции и поддерживаю тесные связи со многими российскими математиками. Трудно в нескольких словах оценить состояние исследований во всей России. Но легко выразить мои надежды на будущее: я надеюсь, что Москва, Санкт-Петербург и другие центры математики в России будут в новом столетии работать столь же плодотворно, как и в двадцатом.

Каковы Ваши планы? Изменится ли как-то направление Ваших исследований после получения премии?

Математика полна открытых проблем, и моя область — не исключение. Мы живем в захватывающее время, когда появляется возможность решить некоторые из них. Так что будущее выглядит отнюдь не скучным.

А. Окуньков

С. ГУСЕВА,
г. Рязань

Сказки про аксиомы геометрии

Достаточно ли развито мышление детей 12—13 лет, чтобы понять логическую структуру геометрии; необходимость и неочевидность каждой аксиомы; требования, предъявляемые к системе аксиом, такие как непротиворечивость и полнота? Возможно ли, чтобы учащиеся 7-го класса самостоятельно придумывали определения и аксиомы геометрии в самом начале погружения в этот удивительный, строгий и логичный мир?

Оказывается, ответить на эти вопросы можно положительно, что подтверждает опыт работы по предлагаемой методике, которая основывается на системе аксиом, принятой в учебнике А.В. Погорелова.

Основная идея — сделать детей участниками создания новой для них науки — геометрии, показать им аксиоматику в процессе ее возникновения.

Необходимый словесный аппарат для описания математических понятий на доступном для учеников уровне дает сказка, которая создает на уроке атмосферу комфорта и эмоционального напряжения, так необходимую для творческой работы учащихся по созданию новой для них теории.

Для введения новых понятий используются системы контрпримеров и задания, позволяющие учащимся глубже понять суть вводимых определений и неопределяемых понятий.

Аксиомы принадлежности. Пересекающиеся прямые

Жил-был строгий-престрогий царь, а царства-государства у него не было. Но в обычном государстве порядки ему не нравились. Потому что там каждому разрешалось делать все, что не запрещено законом. Получается полный беспорядок: кто толкается, кто на заборах пишет, а кто девочек вперед не пропускает.

И решил строгий-престрогий царь создать такое государство, где каждый будет делать только то, что разрешено законом. Обнес он свое государство высоким-превысоким забором, а у ворот поставил стражников, которые не пускали незнакомцев. Смотрит, а никого в его государстве и нет. Решил он поселить простейшие фигуры: точку, прямую и плоскость.

Поставил он на плоскости две точки и совсем собрался было провести через них прямую, да призадумался, ведь закона, разрешающего это, нет. «Эдак я сам чуть не нарушил свой основной принцип: можно лишь то, что разрешено законом. А раз такого закона нет, надо его ввести», подумал царь и издал следующий закон.

Аксиома 1. *Через две различные точки можно провести прямую,* затем немного подумал и добавил — *и только одну* (рис. 1).

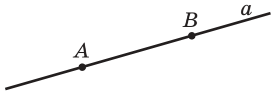


Рис. 1

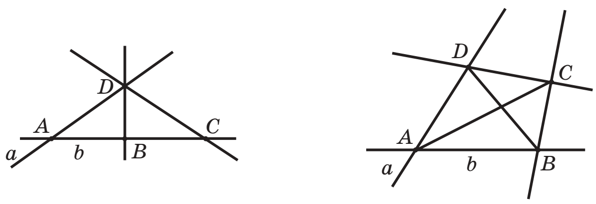
Полюбовался царь на свое государство и так захотелось ему поставить еще точку, что пришлось еще закон издать.

Аксиома 2. *Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой и не принадлежащие этой прямой.*

? Как вы думаете, сильно ли расширил царь свое государство?

Кажется, что на две точки, но давайте рассуждать. Обозначим прямую буквой a, тогда по аксиоме 2 существует точка, принадлежащая этой прямой (обозначим ее через A), и точка, не принадлежащая a (обозначим ее B). Через точки A и B по аксиоме 1 мы можем провести еще одну прямую (обозначим ее через b). Относительно этой новой прямой b (согласно аксиоме 2) существует точка C, не лежащая на ней.

Точка C может лежать на прямой a, а может и не лежать на ней. Если $C \in a$, то обе аксиомы выполнены, и у царя в государстве всего три точки и три прямые. Если $C \notin a$, то тогда в государстве будет уже по крайней мере 4 точки и 4 прямые (см. рис. 2,*а*) или 4 точки и 6 прямых (см. рис. 2,*б*). Конечно, точек и прямых может быть и больше (даже бесконечно много), но это вовсе не следует из первых двух аксиом. Для выполнения этих аксиом достаточно, чтобы в государстве было только три точки.



а) б)

Рис. 2

— И все равно эти законы очевидные, зачем они нужны? — может спросить какой-нибудь любознательный ученик.

— Мы должны описать законы, которые выполняются только на плоскости. Рассмотрим другое пространство: поверхность шара — сферу. Под *прямой* будем понимать *кратчайшую линию, соединяющую две точки*. Обратите внимание, что прямые на сфере превращаются в окружности. Оказывается, на поверхности шара существует две точки, через которые можно провести несколько «прямых» (рис. 3).

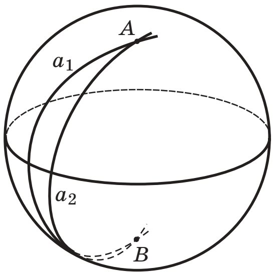


Рис. 3

Например, рассмотрим поверхность Земли. Возьмем две точки — Северный и Южный полюсы. Любой меридиан Земли будет являться «прямой», проходящей через две выбранные точки. Итак, на поверхности шара наши законы не выполняются.

Хорошо, что в моем государстве такие беспорядки невозможны. Благодаря введенным законам оно всегда будет ровным и плоским, — подумал царь.

И вдруг он увидел, что ему навстречу идет незнакомец (рис. 4).

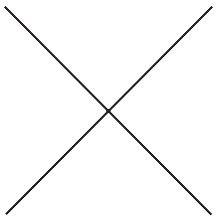


Рис. 4

— Кто ты? — удивился царь. — В моем государстве есть только точки, прямые и плоскость, а тебя я не знаю.

— Вы должны меня узнать, Ваше Величество. Приглядитесь повнимательнее.

Смотрит царь, а ведь и верно: две прямые, а у них одна общая точка.

— А вас как звать-величать?

— Мы — Пересекающиеся Прямые, — хором ответили те.

— Ну что ж, раз вы через основные понятия — точку, прямую и плоскость — объясняетесь-определяетесь, живите в моем государстве, — сказал царь. — И впредь жить в геометрическом государстве разрешаю только моим знакомым и знакомым моих знакомых, а стражу строго-настрого предупрежу, чтобы незнакомцев не пускала.

Решил царь имена-названия своих жителей записывать в книгу да объяснять, какого они роду-племени. На первой странице книги он написал:

Определение 1. *Пересекающимися прямыми называют две различные прямые, имеющие одну общую точку.*

? Почему определение, а не название? Да ведь главное не имя-название, а то, как новое понятие определяется (объясняется) через основные (точку, прямую, плоскость).

А ведь в моей геометрии появилось новое слово «принадлежит», — заметил царь. — Оно очень важное, объясняет отношения между основными понятиями (точками, прямыми, плоскостями). Введу-ка я для него специальное обозначение «$\in$». Теперь можно не писать словами: «Точка B принадлежит прямой b», а записать «$B \in b$». Если же точка B не лежит на прямой b, то запись будет «$B \notin b$» (перечеркнутый знак принадлежности). Так, глядишь, и собственную письменность, язык геометрических символов, понемногу введу, — размечтался царь.

Аксиома взаимного расположения точек на прямой. Отрезок, луч, угол

? Из чего же на данном этапе состоит наша геометрия? Мы имеем бесконечное множество точек и прямых на плоскости. Говоря об отношениях между точками и прямыми, мы используем слова: *принадлежит*, *не принадлежит*, *проходит*.

А как описать взаимное расположение трех точек на прямой? Как, например, расположены точки A, B и C (рис. 5) друг относительно друга? В каком порядке выстроились они на прямой? Словами «принадлежит» и «проходит» уже не обойдешься.

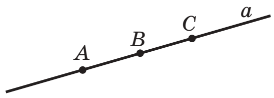


Рис. 5

Если точки B и C лежат по одну сторону от A, надо сказать, что точка B лежит между точками A и C. Значит, говоря об отношениях между точками и прямыми, наряду со словами «принадлежит» и «проходит», нам обязательно понадобятся и слова «лежит между».

Теперь мы могли бы сказать: из трех точек на прямой одна лежит между двумя другими. Но можно ли утверждать это? Конечно, нет. Обратите внимание, что для трех точек на окружности этот закон не выполняется (рис. 6).

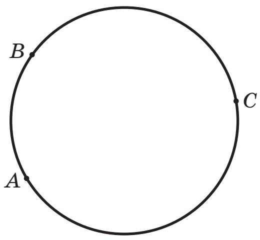


Рис. 6

Уточним наше утверждение и введем новый закон.

Аксиома 3. *Из трех точек на прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими.*

Однажды в ворота геометрического государства, где жили только точки и прямые, кто-то постучал.

— Кто там? — грозно спросили стражники (ведь им строго-настрого было приказано не впускать неизвестных).

— Меня зовут Отрезок, — ответил незнакомец, — и я хочу жить вместе с вами.

— Мы тебя не знаем, не представляем, как ты выглядишь, и пока не объяснишь нам, кто ты такой, мы тебя не впустим, — заявили охранники.

— Я, — сказал Отрезок, — часть прямой.

— Это ты? — спросили стражники и показали чертеж (рис. 7).

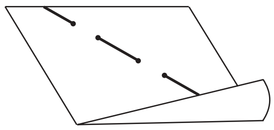


Рис. 7

— Нет, это не я, — послышался грустный голос. — Отрезок — часть прямой, ограниченная двумя точками.

— Мы не знаем слова «ограничен», мы знаем: «лежит между», «принадлежит», «разделяет», — возразили стражники.

— Отрезок — часть прямой, состоящая из точек этой прямой, лежащих между двумя данными, — выкрутился Отрезок.

Стражники показали новый чертеж (рис. 8).

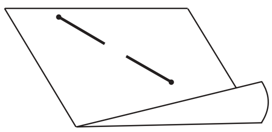


Рис. 8

Тогда Отрезок посмотрел на рисунок и увидел, что он очень похож, просто стражники изобразили не все его точки. Тогда он окончательно понял: *отрезком называется часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками*. Эти точки называются *концами отрезка*.

— А это ты? — спросили стражники (рис. 9).

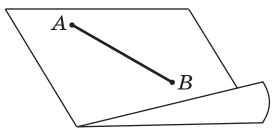


Рис. 9

— Это я! — радостно закричал Отрезок.

Вот так Отрезок поселился в геометрическом государстве, а царь вписал его в книгу определений. Как вы думаете, какие новые понятия должны появиться следующими?

Конечно, полупрямая (луч) и угол, потому что их легко описать (определить) через первоначальные понятия: точку, прямую и плоскость.

Задание 1. Какие из предложенных фигур (рис. 10) соответствуют каждому из «определений» луча? Учтите, что из трех предложенных «определений» верно только одно.

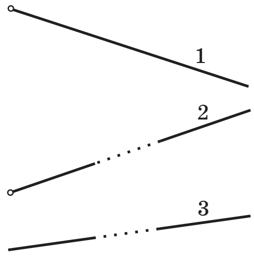


Рис. 10

Определение 1. Лучом называется часть прямой.

Определение 2. Лучом называется часть прямой, которая состоит из точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки.

Определение 3. Лучом называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки.

Вопрос. Чем отличается второе определение от третьего?

Мы видим, что первому определению соответствуют все три фигуры, второму — первая и вторая фигуры, и только третьему определению соответствует одна фигура — первая, следовательно, только определение 3 является верным.

Полупрямой или лучом называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки. Эта точка называется *началом луча.*

Задание 2. Нарисуйте фигуры, соответствующие описаниям:

1) фигура состоит из двух различных прямых плоскости;

2) фигура состоит из двух различных полупрямых плоскости;

3) фигура состоит из двух различных полупрямых, имеющих одну общую точку;

4) фигура состоит из двух различных полупрямых, исходящих из одной точки;

5) фигура состоит из одной точки и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки.

Вопрос. Чем отличается третья и четвертая фигуры? четвертая и пятая фигуры?

Ответы к заданию 2 вы найдете на рисунке 11.

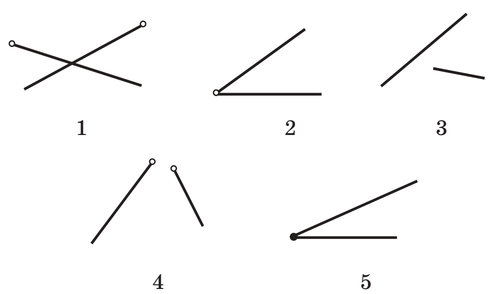


Рис. 11

Углом называется фигура, которая состоит из одной точки — *вершины угла* и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки — *сторон угла*.

Задание 3. Сформулируйте предложения, определяющие фигуры, изображенные на рисунке 12. При выполнении этого задания можно использовать все понятия, которые уже есть в нашей геометрии:

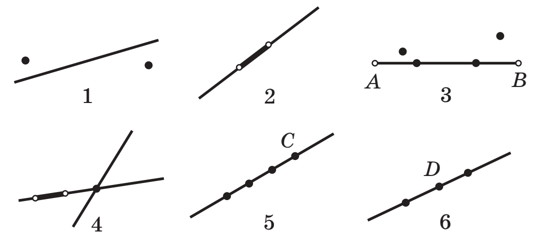


Рис. 12

• первоначальные понятия (точка, прямая, плоскость),

• отношения между ними (принадлежит или проходит, лежит между, лежит на прямой по одну сторону от данной точки, по разные стороны от данной точки),

• новые понятия (пересекающиеся прямые, отрезок, полупрямая или луч, угол).

Ответы к заданию 3 вы найдете среди следующих предложений.

Данная фигура это:

— прямая и отрезок, лежащий на ней;

— точка C на прямой и три точки этой прямой, лежащие по одну сторону от точки C;

— прямая и две точки, не принадлежащие ей;

— точка C, принадлежащая прямой, и две точки, лежащие по разные стороны от точки C;

— отрезок AB; две точки, принадлежащие ему, и две точки, не принадлежащие ему.

— две прямые, пересекающиеся в точке C, и отрезок на одной из них.

Аксиомы измерения отрезков и углов (аксиомы порядка)

Однажды царь геометрического государства поехал с дружественным визитом в алгебраическое королевство.

Только он вышел из самолета, смотрит, а числа все друг за другом стройными рядами стоят, его встречают: сначала маленькие, а затем все больше и больше, и никто порядок следования не нарушает, каждое число свое место имеет, равные числа рядышком стоят.

Восхитился царь, ведь он создал государство со строгими законами, но даже у него такого порядка нет.

Вспомнил он, как хотел забор из равных отрезков поставить, а отрезки все разные подбегали, ведь ни слова «меньше», ни слова «больше», ни слова «равно» в его государстве не было; хотел покатую крышу сделать, а все бревна под разными углами ложились.

Решил царь тогда и в своем государстве числа ввести, чтобы с их помощью отрезки и углы сравнивать, ведь длина отрезка — число и мера угла — число. И издал он новый закон.

Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.

Один любопытный отрезок воспользовался новым законом и измерил свою длину, которая оказалась равна 8 см, а потом попросил точку, чтобы она разбила его на две части, длиной 5 см и 4 см. Как ни пыталась сделать это маленькая точка, у нее ничего не получалось, ведь длина любого отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

Пришлось царю формулировать закон иначе:

Аксиома 4. *Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин его частей, на которые он разбивается любой его точкой.*

Согласно этому закону для любого отрезка AC и любой точки B, лежащей на отрезке AC (рис. 13), выполняется равенство

$$AB + BC = AC.$$

Рис. 13

Каждый отрезок посчитал своим долгом узнать свою длину. Длины некоторых отрезков оказались равны. И назвал царь такие отрезки *равными*.

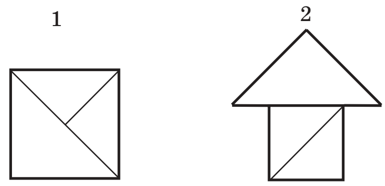
Отрезки, длины которых равны, называются равными отрезками.

— Вот из таких отрезков и построю новый забор, — подумал царь. Но ведь нужно измерять и градусные меры углов, поэтому понадобился еще один закон.

Аксиома 5. *Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен* $180°$. *Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.*

? Обратите внимание, что последние предложения в обоих законах очень важны. Всегда ли целое равно сумме своих частей? Разобьем слово «камыш» на части-буквы: к, а, м, ы, ш, затем сложим из этих букв-частей целое слово «мышка». Но «камыш» и «мышка» — разные слова.

Возьмем фигуру, например квадрат, и разобьем ее на три части. Из этих частей сложим новую фигуру (рис. 14). У нас получилась другая фигура!



Фигура 1 не равна фигуре 2.

Рис. 14

Углы, градусные меры которых равны, называются равными углами.

На каком из рисунков 15, *а—в* угол AOB разбивается лучом OC (или DC) на два угла? Какой из лучей (OK или OL) проходит между сторонами угла MON (рис. 16)? Конечно, луч OK, — скажете вы.

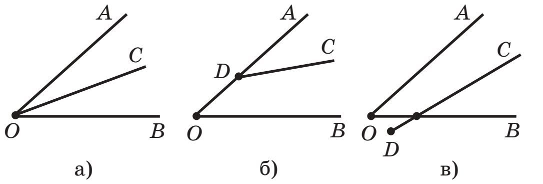


Рис. 15

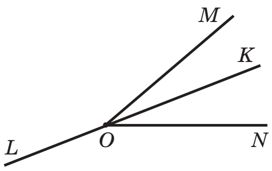


Рис. 16

Царь тоже так решил, а чтобы луч OL не мог называть себя «лучом, проходящим между сторонами угла» (это опять был бы беспорядок), пришлось царю открыть свою книгу с названиями и записать следующее определение.

Определение. *Луч с началом в вершине угла называется проходящим между его сторонами, если он пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла.*

? Луч OL не может пересечь ни одного отрезка с концами на сторонах угла, поэтому его нельзя назвать проходящим между сторонами угла MON (рис. 17), и он не делит угол на две части.

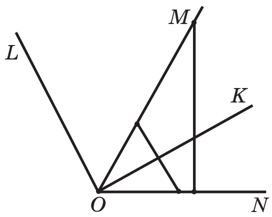


Рис. 17

Наконец-то у меня в государстве порядок. Теперь я знаю, какие отрезки и какие углы равны, и могу сравнивать их, — довольно сказал царь.

Аксиомы откладывания отрезков и углов. Непротиворечивость системы аксиом

Когда царь издал закон, что каждый угол имеет определенную градусную меру, а отрезок — длину, все фигуры обрадовались: отрезки захотели скорее узнать свою длину, а углы — градусную меру. И пригласил царь в свое государство измерительные инструменты — *линейку* и *транспортир*. Если бы они, бедняжки, знали, что их там ждет, они бы никогда не согласились приехать. Что с ними случилось? Их посадили в тюрьму. Дело в том, что линейка и транспортир умеют не только измерять отрезки и углы, но и откладывать их. В самом деле, если требуется на данной полупрямой от ее начальной точки отложить отрезок, равный, например, 5 см, или угол, равный 40°, то линейка и транспортир с этим легко справятся. Вот и затеяли Линейка и Транспортир игру: линейка откладывала отрезки заданной длины, а транспортир — углы одинаковой градусной меры. При этом у них получились замечательные фигуры (рис. 18).

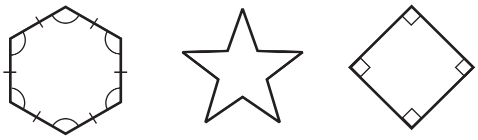


Рис. 18

За этим занятием их и застали стражники.

— Вы нарушили законы нашего государства и пойдете в тюрьму, — сказали они.

— За что? — удивилась Линейка. — Разве запрещено откладывать отрезки и углы? Что в этом плохого, если я на какой-нибудь полупрямой от ее начальной точки отложу отрезок заданной длины?

— Это не запрещено, — согласились стражники, — но и не разрешено, а у нас можно делать только то, что разрешено. У нас есть закон, который разрешает измерять отрезки и углы, но нет закона, который разрешает их откладывать.

Когда царь узнал, что его гости в тюрьме, ему стало стыдно. Чтобы исправить положение, он решил принять закон, позволяющий откладывать отрезки и углы. Он записал: «На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины», — и хотел было уже добавить «и при этом только один», но задумался, а почему бы не разрешить откладывать два таких отрезка?

— Допустим, — рассуждал он, — на полупрямой a от начальной точки A можно было бы отложить два отрезка AB и AC длиной 4 см, то есть $AB = AC = 4$ см, тогда по аксиоме 3 среди трех различных точек A, B и C одна, и только одна, лежит между двумя другими (рис. 19). Пусть точка B лежит между точками A и C. По аксиоме 4 $AB + BC = AC$, то есть $4 + BC = 4$, таким образом, $BC = 0$, что противоречит тому, что каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.

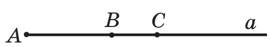


Рис. 19

Царь возмутился:

— Разве в нормальном государстве может быть два закона, противоречащих друг другу? Ведь тогда те, кто исполняет первый закон, нарушают второй, а те, кто исполняет второй закон — нарушают первый.

Хорошенько подумав, строгий-престрогий царь уверенно записал:

Аксиома 6. *На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и притом только один.*

А еще он сделал важный-преважный вывод: система аксиом обязательно должна быть непротиворечивой, то есть любые две аксиомы не должны противоречить друг другу.

А чтобы Транспортир не был преступником, царь издал также закон об откладывании углов: «От любой полупрямой можно отложить угол с заданной градусной мерой, и только один».

Подумав, он понял, что от любой полупрямой в разные полуплоскости можно отложить два угла с заданной градусной мерой (рис. 20).

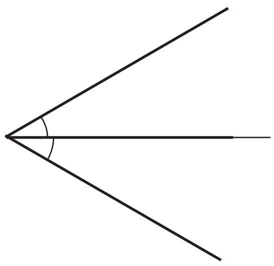


Рис. 20

Пришлось переписать закон: «От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, и только один».

Вдруг царь вспомнил, что транспортир умеет откладывать углы только меньше 180°, и издал закон в следующей окончательной формулировке:

Аксиома 7. *От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол заданной градусной меры, меньшей* 180°, *и только один.*

Аксиома разбиения плоскости. Полнота системы аксиом

Однажды к царю геометрического государства прибежал на прием возбужденный маленький отрезок, который кричал:

— Я разгадал великую тайну! Я знаю, что такое прямая, я знаю! Прямая — это отрезок!

— Какой ты маленький и глупый, — возразил царь и хотел было заняться своими делами, но отрезок настаивал:

— Никто никогда не знал, что такое прямая в геометрии, но о прямой известны три закона:

• через две различные точки можно провести одну, и только одну, прямую (аксиома 1);

• какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой и не принадлежащие ей (аксиома 2);

• из трех точек на прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими (аксиома 3).

Значит, если для какой-то фигуры верны эти три закона, то это и есть прямая.

— Верно, — согласился царь, — но эти три закона верны только для прямой.

— Давайте вместо слова «прямая» вставим слово «отрезок».

Вот что у них получилось:

• через две различные точки можно провести один, и только один, отрезок;

• каков бы ни был отрезок, существуют точки, принадлежащие отрезку и не принадлежащие ему;

• из трех точек на отрезке одна, и только одна, лежит между двумя другими.

— Все три аксиомы выполняются и для отрезка, — удивился царь, — значит, прямая — это отрезок?

— Ура! Я — прямая! — закричал отрезок.

— Как же так, в геометрическом государстве нет закона, с помощью которого можно отрезок от прямой отличить? Моя система законов неполная! — разгневался царь-государь, схватил перо и стал думать, как же сформулировать следующий закон.

И сделал он два чертежа (рис. 21).

? Чем же отличаются изображенные на них фигуры?

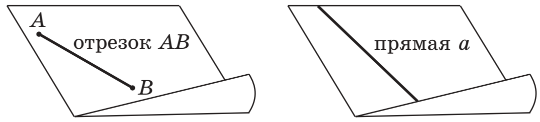


Рис. 21

Отрезок можно обойти, а прямая бесконечно продолжается в обе стороны. Значит, если мы возьмем две точки *по разные стороны от прямой*, то отрезок с концами в этих точках обязательно пересечет прямую, а если мы возьмем две точки *по одну сторону от прямой*, то отрезок с концами в этих точках не пересечет прямую.

У нас появились новые слова. Теперь мы знаем, что значит — две точки лежат по разные стороны от прямой и что значит — две точки лежат по одну сторону от прямой (рис. 22).

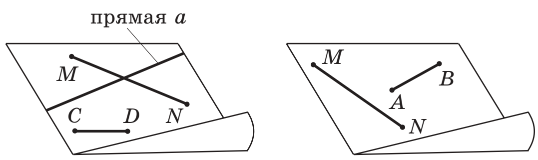


Рис. 22

Отрезок сформулированным свойством не обладает, не выполняется оно и на поверхности трубы — цилиндра, где можно соединить точки A и B «отрезком» так, что хотя точки A и B лежат по разные стороны от «прямой a», но «отрезок AB» не пересекает прямую (рис. 23).

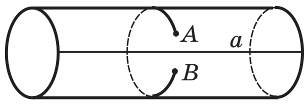


Рис. 23

Вот какое важное это свойство: оно выполняется только для прямой и плоскости, — заметил царь. Но ему захотелось сформулировать его короче.

— Прямая разбивает плоскость на две какие-то части. (А какие, сформулировать царь никак не может.)

В это время в ворота геометрического государства кто-то постучал.

— Кто там? — спросили стражники.

— Я, Полуплоскость, — послышался ответ. — Так называют часть плоскости, которая состоит из всех точек, лежащих по одну сторону от данной прямой.

Стражники очень удивились и спросили:

— А прямая *a* (рис. 24) принадлежит тебе или нет?

Незнакомка быстро исправилась:

— *Полуплоскостью называется часть плоскости, состоящая из прямой и всех точек плоскости, лежащих по одну сторону от данной прямой.*

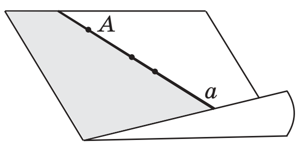


Рис. 24

Вот так в нашей геометрии поселилась еще одна фигура — полуплоскость, а царь смог закончить, наконец, формулировку своего нового закона.

Аксиома 8. *Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.*

В книгу названий были записаны три новых определения: определение точек, лежащих по разные стороны от данной прямой; определение точек, лежащих по одну сторону от данной прямой, и определение полуплоскости.

ФОТО НА КОНКУРС!

Хороший урок — хорошее настроение!

Математика – это круто!

Автор фотографий: Т.Ф. Двойцова, школа № 45, г. Новоуральск, Свердловская обл.

Л. ЧЕРКАСОВА,
с. Шаповка, Саратовская обл.

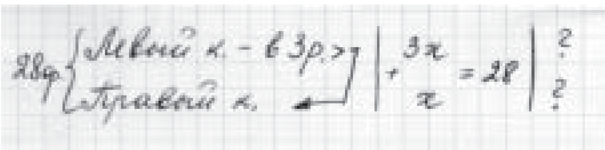
«Сердце» задачи

Впервые задачи, решаемые составлением уравнений, встречаются в 5-м классе в теме «Уравнения». Традиционная методика требует текстового оформления, что пятиклассникам дается довольно трудно: пишут они медленно, терминологией владеют слабо, отсюда большая затрата времени на уроке. Зато еще с начальной школы отработаны навыки краткой записи условия задачи. Поэтому я считаю, что в 5–6-х классах основной упор надо делать на схематическое оформление решения задач, без подробного текста. Сам текст проговаривается устно в целях экономии времени. А для анализа задачи и поиска решения делаем следующее: при записи краткого условия справа оставляем пустой столбик, где и будем проводить активный анализ и поиск решения. Мы с учениками называем это место «сердцем» задачи.

Проиллюстрируем это на примере задачи.

Задача 1. В двух карманах было 28 орехов, причем в левом кармане в 3 раза больше, чем в правом. Сколько орехов было в каждом кармане?

Запись в тетради:



Решение. $3x + x = 28$,

$4x = 28$,

$x = 7$ (орехов) — в правом кармане;

$28 - 7 = 21$ (орех) — в левом кармане,

или $7 \cdot 3 = 21$ (орех).

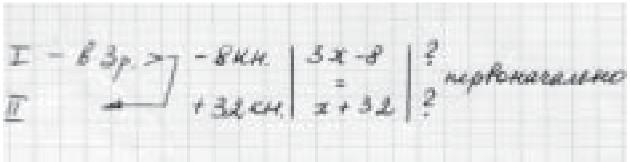
Ответ: 21 орех, 7 орехов.

Ученик устно проговаривает текст, пользуясь полученной схемой: пусть x орехов было в правом кармане, тогда $3x$ орехов было в левом кармане. Знаем, что в двух карманах было 28 орехов. Получим уравнение $x + 3x = 28$. Решение уравнения комментируем по ходу.

В 6-м классе появляются более сложные задачи.

Задача 2. На одной полке было в 3 раза больше книг, чем на другой. Когда с одной полки сняли 8 книг, а на другую положили 32 книги, то на полках стало книг поровну. Сколько книг было на каждой полке первоначально?

При записи краткого условия шестиклассники анализируют задачу и переводят текст в математические термины. А в оставленном пустом столбце по мере его заполнения происходит поиск решения задачи.



Решение. $3x - 8 = x + 32$ и т.д.

Шестиклассники пока еще устно проговаривают текст.

Иное положение в 7–9-х классах. Техника письма достигла большей скорости, поэтому решение оформляется полностью. Различаем три вида оформления:

а) схематичное (краткое условие + схема + уравнение);

б) неполное (то же, что в пункте «а», + решение уравнения);

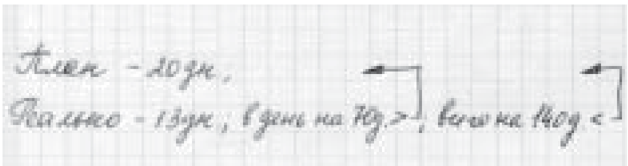
в) полное (то же, что в пункте «б», + текст).

При полном оформлении задачи краткое условие и схема остаются чаще на черновиках.

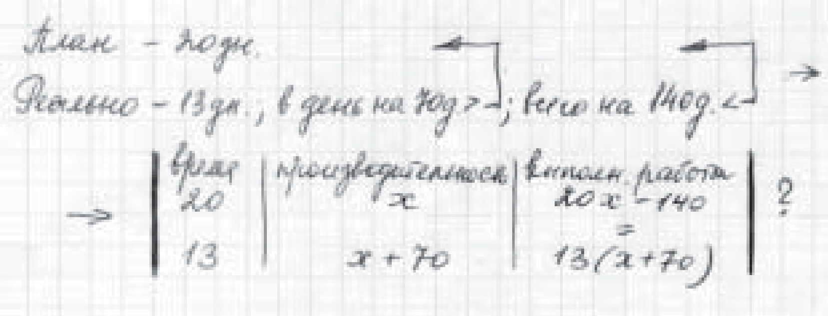
Рассмотрим применение схемы-анализа для решения некоторых основных типов задач. Задачи возьмем из «Сборника заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы» Л.В. Кузнецовой и др.

Ученик, записывая краткое условие, делает анализ задачи.

Задача 3. Бригада рабочих должна была изготовить определенное количество деталей за 20 дней. Однако она изготовляла на 70 деталей в день больше, чем планировала первоначально. Поэтому уже за 7 дней до срока ей осталось изготовить 140 деталей. Сколько деталей должна была изготовить бригада?



Деление столбика («сердце задачи») на три части подсказано условием задачи (время, производительность, выполненная работа). Заполнение столбцов начинают с внесения известных величин (в данном случае — время). Затем ученик стоит перед выбором: что обозначить за x? Если обозначить за x искомую величину, то последним заполняется столбец «производительность», и мы получим дробное уравнение. А если за x обозначить «производительность», то уравнение появится в столбце «выполненная работа», и уравнение будем целым. То есть идет поиск решения задачи.



готовить $20x$ деталей, а изготовила $13(x + 7)$ деталей, что на 140 деталей меньше, чем планировалось. Получим уравнение

$20x - 13(x + 70) = 140,$

$7x = 1050,$

$x = 150$ (дет./день) — это производительность бригады по плану,

$150 \cdot 20 = 3000$ (дет.) — бригада планировала изготовить.

Обычно эту работу ученик оставляет на черновике. В традиционной методике также применяется табличный способ оформления. Но... Много времени расходуется на вычерчивание таблицы, которая обычно оформляется в «чистовом» варианте записи, а значит, требует аккуратности. Моя вышеописанная комбинация краткого условия с незавершенной таблицей позволяет систематически разворачивать текстовое оформления решение задачи.

Решение. Пусть планировалось изготавливать x деталей в день. Но на самом деле в день изготавливали $(x + 70)$ деталей. По плану бригада должна была из-

Проверка.

1) $150 + 70 = 220$ (дет./день) — на самом деле.

2) $220 \cdot 13 = 2860$ (дет.) — изготовила бригада.

3) $3000 - 2860 = 140$ (дет.).

Ответ: 3000 деталей.

Общеизвестно высказывание: «Решение математической задачи можно сравнить со взятием крепостей». При применении вышеописанного приема решение большинства текстовых задач за курс основной школы со взятием крепостей не ассоциируется.

ФОТО НА КОНКУРС!

Ум хорошо, а пять лучше!
Автор: Т.Ф. Двойцова, школа № 45, г. Новоуральск, Свердловская обл.

Контрольная работа?
Говорят, теорему Пуанкаре недавно доказали — вот над чем надо подумать!
Автор: Л.И. Фролова, основная школа № 1, г. Железноводск, Ставропольский край

Шеф-редактор С. Островский
И.о. главного редактора Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель ООО «Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя:
ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (495)249 3138
Отдел рекламы: (495)249 9870
Редакция газеты «Математика»:
тел.: (495)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru