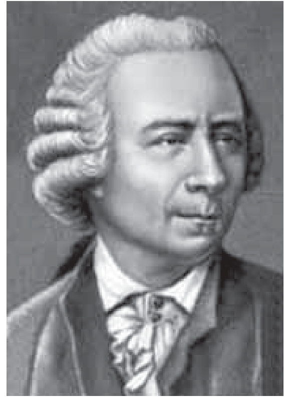
#11

1—31 марта 2007 г.

Электронный информационный спутник газеты «Математика»



Специальный выпуск

К 300-летию Леонарда Эйлера (1707–1783)

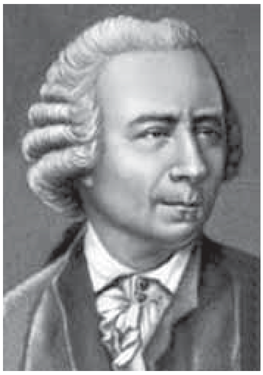
СОДЕРЖАНИЕ НОМЕРА

С. ГИНДИКИН,
Москва

Жизнеописаніе Леонарда Эйлера

Итак, Эйлер перестал вычислять и жить.
Кондорсе

В начале 1783 г. директором Петербургской академии наук была назначена княгиня Екатерина Романовна Дашкова, которая за 20 лет до того была ближайшей сподвижницей Екатерины II, в дни ее воцарения на российском троне. Известная своей изобретательностью княгиня придумывает безошибочный ход, который должен убедить академиков в ее приверженности науке. Она уговаривает сопровождать ее при первом посещении Академии престарелого Эйлера, который давно был не в ладах с академическим начальством и не посещал академических конференций. Слепой Эйлер появляется в сопровождении сына и внука. Дашкова вспоминала впоследствии: «Я сказала им, что просила Эйлера ввести меня в заседание, так как, несмотря на собственное невежество, считаю, что подобным поступком самым торжественным образом свидетельствую о своем уважении к науке и просвещению».



Леонард Эйлер

А всего через несколько месяцев в протоколах Академии было записано: «В заседании конференции 11 сентября 1783 г. академик Н.И. Фусс взял на себя обязанности секретаря[1], отсутствующего из-за кончины его знаменитого отца, г. Леонарда Эйлера, который умер от апоплексического удара 7 сентября в 11 часов вечера, в возрасте 76 лет, 5 месяцев и 3 дней, совершившего свой долгий и блестящий путь и сделавшего свое бессмертное имя известным всей Европе». Предвестник несчастья в виде легкого головокружения появился в начале сентября, когда Эйлер вычислял скорость поднятия аэростата. В день смерти он обсуждал с астрономом А.И. Лекселем результаты вычислений орбиты Урана, недавно открытого Гершелем.

Исключительная личность Эйлера, его беспрецедентная роль в истории Академии заставили искать нестандартные способы почтить его память. 23 октября академик Н.И. Фусс, ученик Эйлера и муж его внучки, произнес «Похвальное слово». Академики решили на свои средства изготовить бюст «бессмертного Эйлера, равно достойного восхищения своим гением, и своими достоинствами», а их «прославленный начальник» (Дашкова) «прибавила к этому великолепную колонну, которая служит основанием этому бюсту»; вначале бюст установили в библиотеке, а затем — напротив кресла президента в зале заседаний (а в библиотеке осталась картина «Силуэты группы академиков Математического класса, занятых установкой бюста покойного Л. Эйлера»). В больших подробностях (включая качество бумаги) обсуждались вопросы, связанные с изданием трудов покойного.

Слухи о почестях ученому распространились далеко за пределы России. Непременный секретарь Французской академии наук маркиз Кондорсе (менее чем через 10 лет он примет участие в революции и его имя вычеркнут из списков Петербургской академии за «достойное порицания поведение... против суверена») сказал в своем «Похвальном слове»: «Итак, народ, который мы в начале этого века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память по смерти: и другим нациям приходится в данном случае краснеть, что они не только в этом отношении не могли предупредить Россию, но даже не в силах ей подражать». Хотя из далекого Парижа обстановка в Петербурге казалась более благополучной, чем была на самом деле, отношение к науке за 60 лет существования Петербургской академии стало неузнаваемым.

Первые годы Академии

Петр I думал об организации академии в России еще в последние годы XVII в. Начиная с 1711 г. он трижды обсуждал свои планы с Лейбницем и даже зачислил последнего на русскую службу. Лейбниц, великий фантазер, мечтавший о распространении академий по миру, впервые встретил государя, с таким энтузиазмом откликнувшегося на его идею. Лейбниц не считал отсутствие наук в России препятствием к созданию Академии и даже находил в этом некоторые преимущества. Однако мало кто в России разделял этот оптимизм. Один из самых образованных сподвижников Петра В.Н. Татищев говорил ему, что «...учить некого, ибо без нижних школ академия оная с великим расходом будет бесполезна». Петр отвечал: «Я имею жать скирды великие, а мельницы нет», а потому он решил вначале построить «водяную мельницу», хотя «воды довольно в близости нет, а есть воды довольно в отдалении», не надеясь успеть «делать канал», но в надежде, что мельница «наследников моих лучше понудит воду привести». Трудности на пути проекта были многочисленны, но в 1724 г. Сенат принял решение о создании Академии наук. В это время даже слово

---

[1] Секретарем был Иоганн-Альбрехт, старший сын Л. Эйлера.

«наука» еще не существовало в русском языке, и Академию назвали «де сиянс Академия».

В 1725 г. Петр умер, так и не дождавшись открытия Академии. Наступает черед наследников «принять участие в строительстве мельницы». Екатерина I не без колебаний осуществила замысел мужа, хотя и не разделяла его интереса к науке (как пишет современник, «похвальные речи ученых были непонятны Ее Величеству»). Судьба Академии все время висела на волоске. Она воспринималась как явление исключительно немецкое, и русская партия, в частности Меншиков, была настроена против нее. Публика плохо понимала функции Академии, и академики по мере сил демонстрировали свои достоинства. Дневник Петербурга, публиковавшийся в «Санкт-Петербургских ведомостях», сохранил запись о публичном чтении, устроенном академией по случаю коронации Петра II (1727 г.). когда академики Делиль и Бернулли дискутировали о вращении Земли вокруг Солнца, академик Байер произнес «похвальную оду латинскими стихами», а «в то же время для народа, гулявшего всю ночь на Царицыном лугу, были пущены фонтаны белого и красного вина». Академики пытались наладить контакты с русской публикой, два раза в неделю двери Академии открывались для посетителей. Иногда там можно было увидеть нечто удивительное. 24 февраля 1729 г. «профессор Лейтман умудрился изменить изображение государственного герба (с помощью призм) в портрет царствующего императора». Академики несколько утвердили себя успехами в организации «потешных огней» и иллюминаций, в сочинении торжественных од, в составлении гороскопов. Высокие материи не были в чести, разве что при составлении «ландкарт» да некоторых рекомендаций мореплавателям. В уставе 1747 г. будет записано: «Государству не может быть инако яко к пользе и славе, ежели будут такие в нем люди, которые знают течение тел небесных и времени, мореплавание, географию всего света и своего государства». А пока умирает в 1730 г. Петр II; а Анна Иоанновна лишь однажды посещает Академию, а затем упоминания об Академии надолго исчезают из дневника Петербурга.

Академиков стали собирать в «социетет наук» еще при Петре I. Постепенно становилось ясно, что первоклассный состав набрать не удается: именитые ученые считали поездку в Россию мероприятием сомнительным и даже рискованным. Лейбница тогда уже не было в живых, а его ближайший последователь Христиан Вольф отказался принять пост президента. Первым президентом стал лейб-медик Блюментрост. Попробовали вместо именитых ученых приглашать их детей (в надежде, что способности к науке передаются по наследству, да и славное имя украсит академические списки). Так, приглашение знаменитому Иоганну Бернулли (1667–1748) было переадресовано его сыну. В многоступенчатой переписке долго было неясно, относится ли приглашение к старшему сыну Николаю (1695–1726) или среднему Даниилу (1700–1782). В конечном счете поехали оба: Николай, прежде бывший профессором римского права, стал профессором математики (с окладом 1000 руб. в год), а Даниил — профессором физиологии (с окладом 800 руб.). Отец напутствовал сыновей словами: «...лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают». Мог ли он думать тогда, что не пройдет и года, как его старшего сына не станет!

Здание Петербургской Академии наук

Эйлер в Петербурге

С завистью провожал братьев Бернулли в 1726 г. ученик их отца Леонард Эйлер: «У меня явилось неописуемое желание отправиться вместе с ними... Дело, однако, не могло так скоро осуществиться, а между тем названные молодые Бернулли крепко пообещали мне по прибытии своем в Петербург похлопотать о пристойном для меня месте».

Леонард Эйлер родился 4 (15) апреля 1707 г. в Базеле, в Швейцарии. Его отец, Пауль Эйлер, был сельским пастором. В молодости он успешно занимался математикой под руководством Якоба Бернулли (1654–1705), старшего брата Иоганна. Первые

Вид на г. Базель

уроки Леонард получил от отца, последние классы гимназии он проходил в Базеле и одновременно посещал лекции по математике в университете, где преподавал И. Бернулли. Вскоре Эйлер самостоятельно изучает первоисточники, а по субботам И. Бернулли беседует с талантливым студентом, обсуждает неясные места; Леонард дружит с его сыновьями, особенно с Даниилом.

В 1723 г. Леонард получил степень магистра искусств; на испытании он произнес на латыни речь о сравнении философии Декарта и Ньютона. Пауль Эйлер считал, что сын должен повторить его карьеру, и Леонард покорно изучал богословие. И отец, и сын отчетливо понимали, что научная карьера бесперспективна. Хотя она и не была особенно престижной (в те годы в Швейцарии любили говорить: пусть учатся немцы, а у швейцарцев есть дела поважнее), число претендентов на профессорские места сильно превышало количество вакансий.

В 1727 г. Эйлер предпринял попытку занять кафедру физики в Базеле, заранее обреченную на неудачу. Тем временем он успешно участвует в конкурсе Французской академии наук на наилучший способ расположения мачт на корабле. Примечательно, что «в гористой Швейцарии, из которой до того времени Эйлер никуда не выезжал, он, конечно, имел случай видеть корабль не иначе, как на картинках...» (*А.Н. Крылов*). Это был первый, но не последний контакт Эйлера с морской наукой.

Даниил Бернулли выполнил обещание, данное при отъезде в Петербург: еще до попытки Эйлера устроиться в Базеле он узнал о возможности получить место адъюнкта по физиологии с окладом 200 рублей. Бернулли торопит, рекомендует ехать «еще этою зимою». Эйлера не смутило, что ему предстоит заниматься медициной. В те годы медицина не воспринималась как наука, далекая от математики. За примерами идти недалеко: его учитель И. Бернулли чередовал занятия математикой с медицинской практикой (как, впрочем, и с преподаванием греческого языка). Эйлер приступает к изучению анатомии и физиологии; позднее он удивлял окружающих медицинскими познаниями. Отъезд не удался столь быстро, как хотелось Д. Бернулли, но весной 1727 г. Эйлер получил «на проезд денег сто тридцать рублей векселем» и уехал в Россию. В Петербург он прибыл в день смерти Екатерины I.

Как и Д. Бернулли, Эйлер предпочитает в рамках занятий физиологией изучать гидродинамические проблемы кровообращения. Надо сказать, что эти проблемы в значительной мере стимулировали создание гидродинамики. В свои первые петербургские годы Эйлер вряд ли думал, что его жизнь так прочно будет связана с Академией. Само дальнейшее существование Академии казалось тогда крайне проблематичным. Потом Н.И. Фусс напишет: «Эйлер был украшением и славой нашей Академии в продолжение пятидесяти лет. На его глазах она начинала свое существование, несколько раз погибала и воскресала». Очень неуютно чувствовал себя Эйлер, когда гибель Академии представлялась ему реальностью. В один из самых тяжелых моментов, когда после кончины Петра II в 1730 г. началось массовое бегство академиков из России, отчаявшийся Эйлер ведет переговоры о поступлении на морскую службу. Но это не потребовалось. Напротив, освободившаяся вакансия позволила Эйлеру занять место профессора (академика) по кафедре физики (правда, со сравнительно невысоким окладом в 400 руб.). А через два года Д. Бернулли покинул Россию и Эйлер занял его кафедру математики (хотя его оклад — 600 руб. — лишь половина оклада, который получал на этом месте Бернулли).


И.П. Кулибин

За эти годы Эйлер стал в Академии заметной фигурой. Большинство академиков не слишком ревностно относились к своим обязанностям, которые к тому же еще и не были четко определены. Эйлер не пренебрегал никакими поручениями: он постоянно делает доклады на академических конференциях, иногда занимая два, а то и три заседания подряд, читает публичные лекции, пишет учебник по арифметике для академической гимназии и научно-популярные статьи для «Примечаний» к «Санкт-Петербургским ведомостям», он в комиссиях по исследованию пожарного насоса, весов, «пильной машины» и магнитов, принимает разнообразные экзамены. Эйлер подробно вникает в многочисленные технические проекты. Забегая вперед, можно вспомнить исследования Эйлера по гидравлическим турбинам и заключения по проектам мостов через Неву, в том числе об одноарочном деревянном мосте И.П. Кулибина, работавшего в Академии механиком. Эйлер постоянно проявлял заботу об изобретателе. В их взаимоотношениях остался неясный момент. И.П. Кулибин 40 лет занимался созданием вечного двигателя («самодвижущихся машин»), и он утверждал, что Эйлер не отвергал возможности создания такой машины («...может де быть в свое время какому щастливому сделать такую машину и откроется»). С другой стороны, имеются и противоположные свидетельства. Надо сказать что рассмотрение проектов вечных двигателей было постоянным занятием петербургских академиков. Напомним, что в 1775 г. Парижская академия отказалась рассматривать проекты вечных двигателей.

Начиная с 1733 г. Эйлер участвует в «экзамене» карт, и постепенно участие в картографической деятельности выходит среди его академических обязанностей на первый план. Встает вопрос о составлении генеральной карты России на основе уже составленных губернских карт, и Эйлер предлагает свой проект, сопровождая его словами: «Я уверен, что география российская через мои и г-на профессора Гензиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли». Острые разногласия с академиком Делилем привели Эйлера в 1740 г. к решению прекратить занятия картографией. Вероятно, состояние здоровья ученого тоже сыграло свою роль в принятии этого решения. 21 августа он писал академику Гольдбаху: «География мне гибельна. Вы знаете, что я за нее поплатился глазом, а теперь опять нахожусь в подобной опасности; когда мне сегодня утром послали часть карт на просмотр, то я тотчас же почувствовал новый припадок, потому что эта работа, требуя всегда рассмотрения одновременно большого пространства, сильнее утомляет зрение, чем простое чтение или одно писание». Эйлер потерял правый глаз в 1735 г., когда выполнил в три дня правительственное задание, на которое академики требовали несколько месяцев. Нет полной ясности, относилось ли это задание к картографии (так можно понять Эйлера) или к астрономическим вычислениям (так пишет Кондорсе).

Леонард Эйлер

На 1740 г. приходится еще один случай, когда Эйлер уклонился от данного ему поручения (других примеров не известно): он переадресовал придворному астроному составление гороскопа «Ивану-царевичу», будущему недолговечному императору Иоанну Антоновичу; впрочем, А.С. Пушкин сообщает иную версию этой истории: «Когда родился Иоанн Антонович, то императрица Анна Иоанновна послала к Эйлеру приказание составить гороскоп новорожденному. Эйлер сначала отказывался, но принужден был повиноваться. Он занялся гороскопом вместе с другим академиком. Они составили его по всем правилам астрологии, как добросовестные немцы, хотя и не верили ей. Заключение, выведенное ими, испугало обоих математиков — и они послали императрице другой гороскоп, в котором предсказывали новорожденному всякие благополучия. Эйлер сохранил однако ж первый и показывал его графу К.Г. Разумовскому, когда судьба несчастного Иоанна Антоновича совершилась».

Не перестаешь удивляться, что все эти многочисленные обязанности оставляли Эйлеру время для его главного дела — для занятий математикой. Именно в эти годы он сложился как великий ученый. Критически переосмыслив труды Лейбница и Ньютона по математическому анализу и механике и работы Ферма по теории чисел, он нашел свой собственный путь в науке. Почти все его книги и статьи были опубликованы позднее, но главное в научной судьбе Эйлера решилось в его первое петербургское десятилетие. Только фантастическая работоспособность и поразительная целеустремленность позволили Эйлеру совместить малозаметные миру занятия математикой с повседневными академическими заботами. Позднее он писал, что для молодого ученого необходимо, чтобы его специальность «была у него главным предметом, и он не... отрывался от нее никакими другими занятиями». По мнению Эйлера, он имел такую возможность в Петербурге: «Такому вожделенному случаю не только доктор Гмелин обязан всем, что сделало известным его имя, но и я, и все прочие, имевшие счастье состоять некоторое время при Русской Императорской Академии. Должен сознаться, сколько мы обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых только что находились. Что собственно до меня касается, то, в случае неимения такого превосходного случая, я бы вынужден был главнейше прилежать к другим наукам, от которых, по всем признакам, я бы отупел только. Его королевское величество (Фридрих II. — ***С.Г.***) недавно меня спрашивал, где я изучил то, что знаю. Я согласно истине ответил, что всем обязан моему пребыванию в Петербургской академии наук».

В 1733 г. Эйлер женился на Екатерине Гзель, дочери академического живописца родом из Швейцарии, вывезенного Петром из Голландии. Из тринадцати их детей выжили три сына и две дочери. Для благочестивого сына сельского пастора семья была крепостью, в которой он мог уберечься от вольных нравов северной столицы. Размеренная семейная жизнь, маленькие радости были необходимы Эйлеру для спокойной работы. Никакие научные занятия не могли быть для него поводом пренебречь семейными обязанностями. Например, он никогда не был безразличным к финансовым проблемам (ему приписываются слова: «Где больше дадут, туда и служить пойду»).

1740 г. был, возможно, самым тяжелым годом в жизни Эйлера. С одной стороны, все признаки благополучия: его академический оклад достиг максимума — 1200 рублей (столько получал Д. Бернулли); он успел многое понять в жизни русского общества и, в частности, в тонкостях академических взаимоотношений. Ему оказывал «честь своим особливым расположением» фельдмаршал Миних; Эйлер ладил даже со всемогущим управителем академии Шумахером, что удавалось немногим академикам. (Возможность спокойно заниматься наукой была для Эйлера важнейшим делом, да и вообще он всю жизнь избегал конфликтов. Можно вспомнить многолетние добрые отношения с И. Бернулли, который постоянно ссорился не только с учениками, но и с братом Якобом и сыном Даниилом.) С другой стороны, великий ученый, только приближавшийся к тридцатитрехлетнему рубежу, успел из-за постоянных перегрузок основательно подорвать свое здоровье. В 1740 г. он оказался в тяжелой депрессии, что было связано не только со здоровьем, но и с постоянным напряжением из-за неустойчивости политической жизни в России. У Эйлера хватило выдержки пережить десятилетие бироновщины, но предстоявшее после смерти Анны Иоанновны новое регентство испугало его. Он вспоминал, что «предвиделось нечто опасное», и «после кончины достославной императрицы Анны — при последовавшем тогда регентстве — дела стали идти плохо». К тому времени появляется возможность переехать в Берлин к Фридриху II, и Эйлер подает прошение об отставке: «...того ради нахожусь принужден, как ради слабого здоровья, так и других обстоятельств, искать приятнейшего климата и принять от его королевского величества прусского учиненное мне призывание. Того ради прошу императорскую академию наук всеподданейше меня милостиво уволить и снабдить для моего и домашних моих проезду потребным пашпортом...» Он обещает сохранить контакты с Академией, «а пришедши в лутчее здоровье, из немецкой земли опять в Россию возвратиться». Впрочем, в Пруссию Эйлер писал, что «твердо решился жить под славным правлением» Фридриха. 29 мая 1741 г. Эйлер увольняется со службы, а позднее удовлетворяется его просьба «почетным членом Академии наук учинить, с определением пенсии по двести рублев в год». Такая практика перевода уезжающих членов Академии в почетные с обязательством оказывать помощь Академии была обычной. С Эйлера берется обещание «через всегдашнюю корреспонденцию и другими математическими пиесами более того служит, нежели как он в действительной академической службе был».

На службе у «коронованного философа»

Итак, Эйлер в Берлине. Фридриха II нет в городе. От покровительства наукам его постоянно отвлекает война: по его собственным словам, ему постоянно приходилось воевать с «тремя блудницами» (Марией-Терезией, Елизаветой, маркизой Помпадур). С года на год откладывается открытие Берлинской академии наук (ее откроют в 1744 г.). А пока король присылает своему новому геометру ласковое письмо из лагеря Рейхенбаха. Эйлеру оказывают знаки внимания, его приглашают на придворный бал. Королеву-мать удивляют односложные ответы ученого на ее вопросы: «Однако отчего это Вы совсем не желаете со мной говорить?» Последовал ответ: «Государыня, простите, я отвык: я приехал из страны, где кто разговаривает, того вешают» (рассказ Кондорсе). Постепенно Эйлер втягивается в берлинскую жизнь. Поручений здесь не меньше, чем в Петербурге: он рекомендует королю книги по баллистике и сам печатает три тома работ на эту тему, обследует нивелировку канала между Гавелем и Одером и состояние дел в солеварнях у Шенебека, участвует в организации государственных лотерей и реформе вдовьих касс, дает отзывы на множество проектов. Все быстро поняли, что он может хорошо делать разнообразные дела и ни от чего не отказывается. После организации Берлинской академии наук (1744 г.) Эйлер — директор ее математического департамента.

Однако отношения с королем сложились не самым лучшим образом. Показательно, что оклад Эйлера составлял половину оклада президента Академии Мопертюи. Эйлер редко удостаивался монаршей похвалы. Вот один из немногих случаев. Эйлер много занимался конкретными задачами оптики и в 1759 г. сконструировал для Фридриха очки, пришедшиеся ему впору; вот как сформулирована похвала: «...я не могу не похвалить Вашего старания извлечь пользу для людей из тех научных занятий, которые наполняют Ваше время. Мои дела не позволяют в настоящее время уделить должное внимание Вашим трудам, но я сделаю это при первой возможности». Эйлер пытается заинтересовать короля дифференциальным исчислением, но безуспешно. А еще Эйлер в 1747 г. «несвоевременно» опубликовал трактат против свободомыслия, что было при прусском дворе немодно. В этот момент ученый почувствовал себя неуютно: «Я замечаю, что наклонность к изящной литературе начинает здесь брать верх над математикою, так что у меня является опасение, чтобы моя личность скоро не сделалась здесь лишнею». Эйлер думает о переезде в Лондон.


Король Фридрих II

В Берлине считали, что в обязанности ученых входит служить украшением гостиных, радовать приятной беседой. Французские ученые Мопертюи и Даржан блестяще владели этим искусством, а Эйлер — нет. Даржан пишет Фридриху об одном из своих коллег: «Между его стилем беседы и манерой Эйлера такая же разница, как между сочинениями Горация и трудами ученейшего и педантичнейшего Вольфа». В 1746 г. с Эйлером познакомился брат Фридриха Август-Вильгельм, он делится с королем своими впечатлениями: «...г-н Мопертюи познакомил меня с математиком Эйлером. Я нашел, что в нем подтверждается та истина, что все вещи несовершенны. Благодаря прилежанию он развил в себе логическое мышление и приобрел тем самым имя, но его внешность и неловкая манера выражаться затемняют все его прекрасные качества и мешают получить от них удовольствие». Фридрих отвечает: «Милейший брат! Я уже думал, что беседа с г-ном Эйлером не доставит тебе особого удовольствия. Его эпиграммы состоят в вычислении новых кривых, каких-либо конических сечений или астрономических измерений. Среди ученых бывают такие сильные вычислители, комментаторы, переводчики и компиляторы, которые полезны в республике наук, но в остальном отнюдь не блещут. Их употребляют подобие дорическим колоннам в архитектуре. Они принадлежат нижнему этажу как опоры всего здания и коринфских колонн, являющихся его украшением». Красноречивое свидетельство взглядов просвещенного монарха на науку и ученых!


С.Я. Румовский

Эйлер делил свое время между наукой и домом, но он не принадлежал к категории ученых, не интересовавшихся внешними событиями и избегавших общения с людьми. Его научные познания были энциклопедичны, он много знал по ботанике, химии, анатомии, медицине, хорошо знал языки древние и восточные, владел русским языком. После его смерти вспоминали, что он хорошо знал «лучших писателей древнего мира», «древнюю литературу по математике», «историю всех времен и народов». Н.И. Фусс писал в своих воспоминаниях, что Эйлер знал наизусть «Энеиду», причем помнил, каким стихом начинается и каким кончается каждая страница его экземпляра. Возможно, это было не то, что ценилось при прусском дворе, да и посмертные оценки всегда добры.

С некоторых пор Эйлер становится героем анекдотов, сочиняемых королем: «Некий геометр, потерявший при вычислениях глаз, вздумал сочинить менуэт с помощью *a* плюс *b*. Если бы его исполнили перед Аполлоном, то геометр рисковал бы тем, что с него, подобно Марсию, содрали бы кожу». Возможно, здесь содержится намек на трактат Эйлера по математической теории музыки. Королю стало известно, что Эйлер в театре не прекращает своих вычислений, — и ученый становится героем новой эпиграммы. Кстати, Эйлер не ценил театра, он лишь с огромным удовольствием посещал театр марионеток.

Эйлер, прочно завоевавший репутацию одного из крупнейших, а может быть, крупнейшего математика Европы, в окружении Фридриха был обречен оставаться человеком второго сорта. Эйлер одно время выполнял функции президента Академии, и после ухода Мопертюи он рассчитывал занять этот пост. Но король прочил в президенты Даламбера, замечательного математика, который был десятью годами моложе Эйлера. Отказ Даламбера не решил вопрос в пользу Эйлера. «Французская опасность» была одной из причин, заставлявших Эйлера думать об отъезде из Берлина.

Тем временем в России с воцарением Елизаветы отношение к Академии изменилось к лучшему. После долгого перерыва в дневнике Петербурга за 1742 г. появляется запись: «Затишье в столице разнообразилось немногими зрелищами да учеными собраниями в Академии наук. В библиотечном зале ее с 17 февраля начались для публики, по два раза в неделю с 10 до 12 часов, физические лекции Крафта, и число посетителей этих бесед, вошедших в моду, оказывалось значительным. Там же открыты рисовальные классы с натуры». Президентом академии назначается 18-летний Кирилл Разумовский, брат фаворита императрицы. Перед этим будущий президент для порядка два года провел в разнообразных университетских городах и обзавелся дипломами. Контакты Эйлера с Академией не прерывались. Никто из почетных академиков так добросовестно не относился к своим обязанностям. За 25 лет пребывания в Берлине Эйлер опубликовал в изданиях Петербургской академии 109 статей (за то же время в Берлине опубликовано 127). Он оказывает Российской академии разнообразные услуги: заботится о пополнении библиотеки, подбирает темы для конкурсов на академические премии, ищет кандидатов на вакантные академические должности, занимается приобретением «волшебных» фонарей и фейерверков для придворных празднеств (эта обязанность все еще лежала на академии как одна из важнейших). Поражает интенсивность переписки Эйлера с русскими академиками, но прежде всего с правителем Академии Шумахером.

В начале 50-х годов Эйлер устраивает в своем доме пансион для своих учеников. Он совмещает занятия с ними с обучением старшего сына Иоганна-Альбрехта, а, кроме того, доходы от этого немаловажны для напряженного семейного бюджета. Одними из первых приезжают воспитанники академического университета С.К. Котельников и С.Я. Румовский, будущие академики (третий ученик Сафронов был через год отослан на родину, поскольку «так предан пьянству, что едва может быть от этого удержан»). Эйлер постоянно озабочен финансовыми проблемами. Он старается, чтобы его семья ни в чем не нуждалась. В 1753 г. Эйлер приобретает имение в Шарлоттенбурге с красивым домом, садом, большим количеством пахотной земли, 6 лошадьми и 10 коровами. В Швейцарии умер его отец, мать переехала к сыну. Эйлер выехал ей навстречу во Франкфурт-на-Майне. Биографов не перестает волновать вопрос, почему он не воспользовался естественным поводом посетить родной Базель: были на это причины сентиментальные или финансовые?

Семилетняя война увеличила житейские трудности. Валюта обесценилась почти вдвое, а жалование не увеличилось. Наступавшие русские войска разрушили имение в Шарлоттенбурге. Однако фельдмаршал Салтыков, узнав имя владельца имения, велит немедленно возместить ущерб; позднее Елизавета добавляет от себя огромную сумму в 4000 рублей. Эти детали свидетельствуют об особом характере взаимоотношений Эйлера с Россией. Он старается не прерывать контактов с Россией даже в военные годы. Это не только научные контакты. Скажем, в 1762 г. он просит через Штеттин прислать 3 центнера «русского масла», центнер «хорошего белого меда», «несколько пудов вологодских свечей» и т.д.

Леонард Эйлер

После окончания войны (1763 г.) Эйлер все решительнее думает о возвращении в Россию. В 1746 и 1750 гг. он уже получал приглашения через Разумовского, но тогда вежливо отложил принятие решения на неопределенный срок. Эйлер едва не уехал в 1763 г., но неожиданно функции посредника в переговорах с королем взял на себя Даламбер. По-видимому, ему удалось убедить обе стороны, потому что в августе он констатирует в письме к Эйлеру: «Я, наконец, считаю себя счастливым, что сохранил королю и Академии такого человека, как Вы». В другом письме через неделю: «Я совершенно убедил его величество, что в Вас Академия понесет невознаградимую потерю, которая нанесет удар славе короля. Я полагаю еще до моего отъезда поручить его вниманию Ваши интересы». Эйлер отказался от переезда, но через два года разразился скандал: Эйлер вызвал гнев короля, заступившись во время ревизии за академического казначея. Переговоры о переезде возобновились с новой силой, а воцарившейся на русском троне Екатерине II очень хотелось получить Эйлера в Петербурге. Эйлер сообщает свои условия: оклад в 3000 руб. (такой оклад получал президент, оклад академика обычно не превышал 1200 руб.), место академика по физике для сына Иоганна-Альбрехта, подходящие места для других сыновей — артиллериста и врача, квартира, свободная от солдатского постоя, и, наконец, учреждение для него поста вице-президента с соответствующим чином. Эйлер не смог стать президентом Берлинской академии, и он хотел хотя бы отчасти реализовать свои честолюбивые планы в Петербурге (на место президента он не претендовал, считая, что в России его должен занимать вельможа). Приятель Эйлера академик Гольдбах служил в министерстве иностранных дел с высоким чином тайного советника. Видно, и Эйлеру захотелось оказаться на склоне лет генералом. 6 января 1766 г. Екатерина пишет канцлеру графу Воронцову: «Письмо к Вам г. Эйлера доставило мне большое удовольствие, потому что я узнаю из него о желании его снова вступить в мою службу. Конечно, я нахожу его совершенно достойным желаемого звания вице-президента Академии наук, но для этого следует принять некоторые меры, прежде чем я установлю это звание — говорю установлю, так как доныне его не существовало. При настоящем положении дел там нет денег на жалование в 3000 рублей, но для человека с такими достоинствами, как г. Эйлер, я добавлю к академическому жалованию из государственных доходов, что вместе составит требуемые 3000 рублей. У него будет казенная квартира и ни малейшей тени солдат. Хотя в Академии нет свободной кафедры физики с жалованием 1000 рублей для его старшего сына, однако я ему их назначаю, так же как дозволяю свободную практику второму (медику), и дам место, если он пожелает вступить на службу. Третий сын (артиллерист) будет помещен без всякого затруднения... Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека». Узнав о желании Эйлера принять участие в перестройке Академии, императрица обещает «не предпринимать до его приезда никаких перемен в Академии, на тот конец, чтобы лучше уговориться с ним об улучшениях...». С великим дипломатическим мастерством Эйлеру отказывают в чине: Эйлер может получить лишь чин коллежского советника (гражданский эквивалент полковника), что недостойно великого ученого: «Я дала бы, когда он хочет, чин, если бы не опасалась, что этот чин сравняет его с множеством людей, которые не стоят г. Эйлера. Поистине его известность лучше чина для оказания ему должного уважения». Эйлер, вероятно, быстро понял, что щедрая императрица умеет четко объяснить границы дозволенного, согласился со всеми условиями и решил «кончить дни свои на службе этой несравненной государыни».

Оказалось, что Фридрих не склонен легко расстаться со своим геометром. В частности, он воспользовался возможностью удержать в армии сына ученого. Все же разрешение на отъезд было получено. Вдогонку король в последний раз использует Эйлера как мишень для острот: «г. Эйлер, до безумия любящий Большую и Малую Медведицу, приблизился к северу для большего удобства к наблюдению их. Корабль, нагруженный его *XX*, его *KK* потерпел крушение — все пропало, а это жалко, потому что там было чем наполнить шесть фолиантов статей, испещренных от начала до конца цифрами. По всей вероятности, Европа лишится приятной забавы, которая была бы ей доставлена чтением их» (из письма Даламберу). Вскоре Фридрих утешился, заполучив на место Эйлера молодого Лагранжа, поучительно мотивируя целесообразность его переезда в Берлин: «Необходимо, чтобы величайший геометр Европы проживал вблизи величайшего из королей».

Снова в России

Эйлер прибыл в Петербург 17 июля 1766 г. Он отсутствовал ровно 25 лет и приближался к своему шестидесятилетию. Поначалу Эйлер всерьез принял предложение Екатерины принять участие в реорганизации Академии. Он привез с собой подробный проект, причем он не стремился к автономии Академии, а, напротив, ориентировался на тесное переплетение деятельности Академии и правительственных учреждений. Однако постепенно выяснилось, что императрица не склонна передоверять Эйлеру руководство Академией. Эйлер получил еще один урок того, что просвещенные монархи любят, чтобы их ученые знали свое место. Как старейшина академиков — декан — он имел немалое влияние на академические дела, но про пост вице-президента никто не вспоминал. А во главе Академии Екатерина поставила (продолжая традиции Елизаветы) младшего брата своего фаворита — графа В.Г. Орлова. Впрочем, возникла небольшая неувязка: пост президента все еще занимал Разумовский, который, будучи командиром Измайловского полка, оказал Екатерине поддержку во время переворота. Его не стали обижать, а для Орлова учредили пост директора Академии. Новый директор по-своему неплохо относится к Эйлеру: заботится о здоровье, достает лекарства, но может и подшутить над стариком, выдав себя, «для проверки зрения» ученого, за бедного просителя из Швейцарии. Незадолго до ухода Орлова в 1774 г. произошел конфликт, после которого Эйлер перестал посещать конференции в академии. Однако он продолжал интересоваться ее делами, и академики нередко собирались на заседания в квартире Эйлера.

Эйлер привез с собой в Петербург кипу рукописей, которые не удалось опубликовать в Берлине из-за почти прекратившейся во время войны издательской деятельности. Но еще больше привез он в своей голове почти созревших, но не реализованных замыслов. А жизнь подсказывала ученому, что он должен торопиться. Вскоре после приезда он лишается зрения во втором глазу, но не прекращает работать, диктуя свои сочинения мальчику, не имевшему ни малейшего представления о математике. Приглашенный императрицей окулист барон Вентцель удалил катаракту на одном глазу, но предупредил, что перегрузка неминуемо приведет к возвращению слепоты. Так и случилось вскоре, ибо Эйлер предпочел потерю зрения пассивности. Он пробует привлечь к занятиям других ученых: своего сына, академиков Крафта, Фусса и Лекселя, но больше всего диктует то, что он знал и хотел поведать людям. За полтора десятка лет он продиктовал более 400 статей и 10 больших книг. К слепоте стала присоединяться глухота. В 1766 г. умирает жена, и Эйлер женится на ее сестре (так проще всего было сохранить порядок, принятый в доме). Сгорел дом и большая часть имущества. Ничто не может заставить Эйлера прервать работу. Летом 1777 г. Эйлера посетил Иоганн (III) Бернулли (1747–1807), племянник Даниила. Вот его впечатления: «Здоровье его довольно хорошо, и этим он обязан умеренному и правильному образу жизни. Зрением, по большей части утраченным, а одно время вовсе потерянным, он, однако, теперь лучше пользуется, чем многие воображают! Хотя он не может узнать никого в лицо, читать черного на белом и писать пером на бумаге, однако пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно и порядочно в обыкновенную величину. Потом они вписываются в большую книгу одним или другим из его адъюнктов, Фуссом или Головиным (чаще первым из них). И из этих-то материалов составляются под его руководством статьи. Таким образом в протяжение пяти лет, которые прожил г. Фусс в доме Эйлера, приведено к окончанию 120 или 130 статей». Эйлер сохранил работоспособность до последних дней. Второй петербургский период продолжался 17 лет. В 1783 г. окончил свои дни сын сельского пастора, ставший величайшим математиком Европы. Похоронили Эйлера на Смоленском кладбище. Надпись на памятнике гласила: «Здесь покоятся бренные останки мудрого, справедливого, знаменитого Леонарда Эйлера». Через 50 лет обнаружилось, что могила утеряна, и лишь случайно (во время похорон невестки ученого) обнаружили «камень, погрузившийся мало-помалу от собственной тяжести в землю и поросший дерном». В Академии почувствовали себя неловко и решили установить новый памятник, «достойный знаменитого геометра». Позднее останки Эйлера были перенесены в некрополь Александро-Невской лавры, где и сегодня можно увидеть его могилу.

Могила Л. Эйлера в Александро-Невской лавре

Великое наследие

Научное наследие Эйлера поражает совершенно беспрецедентными размерами. При жизни увидели свет его 530 книг и статей. Последние годы жизни академические издания не справлялись с потоком научной продукции слепого ученого, и он шутливо обещал графу В.Г. Орлову, что его работы будут заполнять «Комментарии» Академии в течение 20 лет после его смерти. Эта оценка оказалась «оптимистической»: Академия занималась изданием трудов Эйлера 47 лет. Число работ дошло до 771, но составленная в 1910 г. Энестремом библиография содержала 886 названий, разбитых по рубрикам: философия, математика, механика, астрономия, физика, география, сельское хозяйство. С 1910 г. Швейцарское общество естествоиспытателей издает собрание сочинений Эйлера, распространяемое по международной подписке: по предварительной оценке оно составит 75 томов большого объема. К началу 80-х годов XX в. вышло 72 тома. Восемь дополнительных томов должна составить научная переписка Эйлера.

Такой объем отражает не только поразительную скорость, с которой работал Эйлер, но и привычку систематически печатать научные тексты, в том числе и сравнительно спешно подготовленные. Большой разброс тематики отражает не только широту интересов и умение быстро войти в далекие области науки, но и многочисленные академические обязанности как в Петербурге, так и в Берлине. Некоторые публикации носят характер коротких реплик. Эйлер легко входил в научные контакты, давал разнообразные консультации, охотно думал над случайными, изолированными задачами, сообщаемыми его корреспондентами. Может показаться, что ученый разбрасывался, проявлял всеядность, но это только на первый взгляд. Случайные вопросы и задачи служили питательной почвой для хорошо спланированных размышлений. Эйлер умел своевременно останавливаться в своих раздумьях, если не видел реалистической возможности двигаться вперед. Он умел организовать свою жизнь так, чтобы многочисленные текущие дела не сильно отражались на основном направлении его работы.

Как это ни парадоксально, без большого преувеличения можно сказать, что всю свою жизнь Эйлер занимался почти исключительно математикой. В других областях науки (например, механике или астрономии) успех его был, прежде всего, связан с применением математических методов. Его философская установка на протяжении всей жизни состояла в том, что естественнонаучные открытия должны получаться путем теоретической (в значительной степени математической) обработки небольшого числа общих, несомненных принципов. В своей швейцарской диссертации девятнадцатилетний Эйлер писал: «Я не считал необходимым подтвердить эту новую теорию опытом, потому что она полностью выведена из самых надежных и неопровержимых принципов механики и, таким образом, сомнение в том, верна ли она и имеет ли место в практике, просто не может возникнуть». Даже законы Ньютона Эйлер пытался вывести из более общих принципов, а в небесной механике он стремился не получать эмпирические формулы из обработки результатов наблюдений, а делать выводы непосредственно из закона всемирного тяготения. Он всюду стремился двигаться от теории к практике. Хотя Эйлер и был всю жизнь связан с экспериментом, это не было его сильной стороной. С.И. Вавилов писал: «...гений Эйлера был, по существу, математический... он плохо чувствовал эксперимент (хотя сам и экспериментировал)...»; в другом месте: «Математическому гению Эйлера не хватало физической интуиции Ньютона и Гюйгенса, позволявшей угадывать решение при отсутствии точной математической формулировки задачи или методов ее решения».

Книги и статьи о Леонарде Эйлере

1. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о физиках и математиках. — М.: МЦНМО, 2001.

2. *Готман Э.Г.* Прямая Эйлера // Квант, 1975, № 2.

3. *Делоне Б.Н.* Леонард Эйлер // Квант, 1974, № 5.

4. *Котек В.В.* Леонард Эйлер. — М.: Учпедгиз, 1961.

5. *Кушнир И.* О двух формулах Эйлера // Квант, 1992, № 12.

6. *Литвинова Е.Ф.* Лаплас и Эйлер // В кн.: Коперник. Галилей. Кеплер. Лаплас и Эйлер. Кетле: Биографические повествования. — Челябинск: Урал, 1997.

7. *Мельников И.Г.* Леонард Эйлер и элементарная математика // Математика в школе, 1957, № 4.

8. *Полякова Т.С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. — М.: КомКнига, 2007.

9. *Прудников В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. — М.: Учпедгиз, 1956.

10. Руководство к арифметике для употребления гимназии при Императорской Академии наук, переведено с немецкого языка чрез Василья Адодурова, Академии наук адьюнкта. — СПб., 1740.

11. Универсальная арифметика, г. Леонгарда Эйлера. Переведенная с немецкого подлинника студентами Петром Иноходцевым и Иваном Юдиным. — Т. I. — СПб., 1768.

12. *Фукс Д.* О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе, Макдональде и об упущенных возможностях // Квант, 1981, № 8.

13. *Юшкевич А.П.* Математика и ее преподавание в России XVII–XIX вв. // Математика в школе, 1947, № 5.

14. *Яковлев А.Я.* Леонард Эйлер. — М.: Просвещение, 1983.

Некоторые статьи и книги из данного списка доступны в электронном виде в Интернете:

www.mccme.ru/free-books — **1.**
www.kvant.mccme.ru — **2, 3, 5, 12.**
www.mathedu.ru — **4, 6, 7, 9–11, 13, 14.**

Н. ДОЛБИЛИН,
Москва

ЛеонардЪ ЭйлерЪ

Российской математической науке несказанно повезло: у ее колыбели стоял гений, Леонард Эйлер, один из величайших математиков всех времен и народов. Творчество Эйлера, едва умещающееся в 760 книгах и научных статьях, охватило все разделы математики того времени. В его работах были решены многие сложные математические проблемы и заложены основы развития математики на многие десятилетия. В своих исследованиях он не пропустил ничего важного из современной ему математики. Универсальность творчества гения, гармоничное сочетание глубокой теории с практикой были унаследованы отечественной математикой и явились основой ее последующих достижений.

Базель
(1707–1727)

Леонард Эйлер родился в семье небогатого протестантского священника Пауля Эйлера и Маргареты Брукер в швейцарском городе Базеле на живописном берегу Рейна. В то время Базель являлся центром образования и культуры европейского масштаба. Базельский университет, основанный папой-гуманистом Пием II за два века до появления на свет Леонарда, являлся очагом просвещения. В нем преподавал выдающийся гуманист эпохи Возрождения Эразм Роттердамский, а также многие известные естествоиспытатели того времени. Базель был центром книгопечатания и искусств.

В середине XVI в. в Базель из Голландии переехала семья Бернулли. Этот эмигрировавший в Швейцарию фламандский род дал впоследствии целый ряд выдающихся ученых, преимущественно в области математических наук. В XVIII в. представителям этого рода было суждено сыграть положительную роль в судьбе гения.

Базель. Кафедральный собор XI в.

Леонарду было около года, когда семья переехала в местечко Рихен, недалеко от Базеля, куда отец Леонарда был переведен пастором.

Первоначальное образование Леонард получил от отца. Пастор, хотя и готовил своего сына для духовной карьеры, учил его также и математике. После домашнего обучения Леонард был отправлен в Базель, где помимо гимназии посещал лекции Иоганна Бернулли.

Профессор И. Бернулли очень скоро заметил в молодом человеке необыкновенный талант и стал выделять дополнительное время для индивидуальных занятий с Леонардом. Беседы с Иоганном Бернулли о математике часто проходили в кругу семьи профессора. Леонард познакомился, а затем и подружился с его сыновьями Николаем и Даниилом.

Петербургский период
(1727–1741)

Приезд молодого сверхталантливого человека в молодую столицу северной страны — это событие небезынтересно нам, современникам непрекращающейся «утечки мозгов» в противоположном направлении.

В 1725 г. императрица Екатерина I, исполняя волю внезапно скончавшегося супруга Петра I, открыла Петербургскую академию и заботилась о ней. Своих ученых в России тогда не было, и расчет строился на приглашении в Академию крупных европейских ученых. Создание благоприятных условий, высокие оклады ученых сыграли свою роль. Вскоре после открытия Академии в Петербурге уже работали немало хороших ученых, в частности, ученик Лейбница — Яков Герман, разносторонне образованный Христиан Гольдбах.

Иоганн Бернулли, находясь в почтенном возрасте и занимая кафедру математики в Базельском университете, уклонился от посланного ему приглашения. Однако поддержал поездку своих сыновей в Петербург, Даниила и Николая. Уезжая в Петербург, молодые Бернулли обещали Леонарду написать, если и для него найдется подходящее место в России. На следующий год они сообщили, что для Эйлера есть место… физиолога при медицинском отделении академии. Узнав об этом, талантливый математик немедленно записался студентом-медиком Базельского университета. Прилежно и успешно изучая дисциплины медицинского факультета, Эйлер находил время и для занятий математикой. В 1726 г. внезапно умирает молодой Николай Бернулли и на его место на математическом отделении Академии наук приглашают Эйлера.

Д. Бернулли

Свой 20-й день рождения Леонард встретил где-то в Германии, на пути в Петербург. По приезде в российскую столицу Эйлер вошел в группу прекрасных ученых-математиков и физиков, какую в то время нигде больше в мире он бы не встретил. Эйлер немедленно активно начал работать над несколькими вопросами прикладной математики.

Едва ли не в день приезда Эйлера в Россию скончалась покровительница Академии Екатерина I. Несколько иностранных академиков начали подумывать о возвращении на родину. В 1730 г. Эйлеру предложили освободившееся место профессора физики, которое он и занял. Это позволило ему стать в возрасте 23 лет петербургским академиком. В 1733 г. он был выбран академиком по математическому отделению вместо уехавшего на родину его друга Даниила Бернулли.

Финансовое положение вследствие этого значительно улучшилось. В 1734 г. он женился на Екатерине Гзель. У них было тринадцать детей, но только пять пережили детский возраст. Леонард Эйлер был замечательным семьянином. Он не только полностью обеспечивал семью материально, не только заботился о карьере своих детей, но и делал все необходимое по уходу за ними. Эйлер писал, что некоторые свои результаты он получил, когда носил на руках младенца, в то время как другие дети возились у его ног.

Обладая громадным талантом, Эйлер был необыкновенно трудолюбив. Соединением этих качеств объясняется многочисленность, глубина и полезность его трудов. Рассказать о научных работах Эйлера, даже только самых выдающихся, в рамках одной статьи — задача абсолютно невыполнимая. Назовем лишь основные направления, в развитие которых Эйлер внес вклад: теория чисел; геометрия; математический анализ; дифференциальные уравнения; вариационное исчисление; теория вероятности; механика. Эйлер чувствовал внутреннюю неразрывность этих областей математики. Исследования в теории чисел и геометрии порождали новые задачи в математическом анализе. Математический анализ обеспечивал математическим аппаратом дифференциальные уравнения и специальные функции, которые оказывались существенными в механике. Механика в свою очередь ставила содержательные задачи перед математикой.

В 1736 г. Эйлер выпускает два тома аналитической механики. Потребность в этой книге была огромная. В 1738 г. появились два тома «Введения в арифметику» на немецком языке. В 1740 г. Эйлер издал сочинение о приливах и отливах морей.

Удивительно, но у Эйлера нашлось время и силы выпустить в 1739 г. книгу о теории музыки, в которой он рассматривал музыку как «часть математики» и пытался построить «вполне регулярный способ» сочинения «приятных» мелодий. Как отмечал сам Эйлер, работа получилась интересной «для музыкантов, хорошо продвинутых в математике, и для математиков, хорошо понимающих музыку».

В 1740 г. скончалась императрица Анна Иоанновна. Эйлер к этому времени достиг пика своего положения в Академии. Он имел непререкаемый научный авторитет, получал максимальный оклад. Благодаря природному таланту ладить с людьми у него были хорошие отношения с влиятельными вельможами. Но подорванное изнурительными трудами здоровье, общая усталость, напряжение из-за политической нестабильности в стране — все это ввергло 33-летнего Леонарда Эйлера в состояние депрессии. В это тяжелое для Эйлера время приходит личное приглашение от прусского короля Фридриха II переехать на работу в Берлин. Эйлер принимает приглашение. В прошении об отставке он обещает поддерживать отношения с Петербургской академией и вернуться, когда поправится здоровье. В июне 1741 г. Эйлер уезжает в Берлин. С Эйлера берется обещание продолжать сотрудничество с Академией. Забегая вперед, скажем, что Эйлер выполнял эти обязан-

Якоб I Бернулли (1654—1705), профессор математики в Базеле. Изучив первый мемуар Лейбница по дифференциальному исчислению, Я. Бернулли применил новые идеи математического анализа к принципиальным вопросам геометрии и механики. Открыл так называемые *числа Бернулли;* решил задачу о *брахистохроне.*

Иоганн I Бернулли (1667—1748), младший брат Якоба, также был одним из выдающихся математиков своего времени. После смерти старшего брата Иоганн занял его кафедру в Базеле (1705). Вместе с Якобом был одним из пионеров дифференциального и интегрального исчисления, является основоположником вариационного исчисления. Ему принадлежит первое систематическое изложение основ анализа.

Николай Бернулли (1695—1726), сын Иоганна Бернулли — математик, профессор Базельского университета, с 1925 года профессор математики в Пербургской академии.

Даниил Бернулли (1700—1782) — крупнейший математик своего времени, с 1725 по 1733 г. работал в Петербурге, член Петербургской, Берлинской и Парижской академий, удостоен 10 почетных премий Парижской академии, автор фундаментального труда «Гидродинамика».

ности, как всегда, добросовестно. В течение 25 лет пребывания в Берлине он опубликовал в «Трудах Петербургской Академии» 109 работ, в том числе две работы, посвященные знаменитой теореме о многогранниках. На получаемые из России деньги он закупал для Академии книги, приборы; подбирал кандидатов на академические должности, писал отзывы на научные работы, причем не только математиков; вел интенсивную переписку с российскими учеными и чиновниками.

Берлинский период
(1741–1766)

Совершенно очевидно, что, приглашая крупного ученого, Фридрих II хотел прежде всего оживить в стране научную жизнь, пришедшую в упадок вследствие недавних войн. Предполагалось на основе существующего Берлинского научного общества создать Берлинскую академию. Эйлер был польщен тем, что король предложил ему одну из главных ролей в этом процессе. Берлинская академия наук была образована 1744 г. Эйлер назначается директором ее математического отделения.

Эйлер и в Берлинской академии имел поручений не меньше, чем в Петербургской. Он руководил обсерваторией и ботаническим садом. Просматривал различные финансовые бумаги, руководил изданием разнообразных географических карт и календарей. Король поручал Эйлеру решение различных практических задач, в том числе надзор за работой насосов и труб в королевской резиденции Сан-Суси. И это далеко не полный список его берлинских обязанностей.

В этот период Эйлер опубликовал 380 научных работ, написал книги по вариационному исчислению, по анализу, о вычислении орбит планет, по кораблестроению и навигации, о движении Луны. Подготовил к публикации научно-популярный трехтомник «Письма к немецкой принцессе».

В 1759 г. умирает президент Академии. Эйлер предполагал, что ему поручат пусть и не пост президента, но руководство Академией. Однако король приглашает на это место Даламбера. И хотя Даламбер отклонил предложение короля, после окончания семилетней войны, в которой Россия и Пруссия были противниками, Эйлер решает вернуться в Россию.

Дом, где жил Л. Эйлер в 1766–1783 гг. (реконструкция)

Возвращение в Россию навсегда
(1766–1783)

Разгневанный Фридрих делал многое, чтобы воспрепятствовать отъезду, например, удерживал одного из сыновей Эйлера в армии. Но Эйлер был непреклонен в своем решении. Правда, немалая заслуга в этом принадлежит Екатерине. Она писала: «Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека». Екатерина удовлетворила практически все условия, которые поставил Эйлер. Условия были достаточно серьезные и касались в основном жалования и устройства его сыновей.

Эйлер вернулся в Россию в 1766 г. В Петербург он привез много рукописей, которые не успел опубликовать в Берлине. Он, как и раньше, был полон новых идей, которые нужно было реализовать. Нельзя было терять времени. Он окунулся в работу с тем же рвением, что и прежде. Будучи старшим по возрасту академиком, он имел большое влияние в Академии, но теперь гораздо меньше, чем прежде, тратил времени на «общественные дела».

В 1771 г. дом Эйлера вместе с имуществом был полностью уничтожен пожаром. Эйлер после этой беды и полной потери зрения продолжал работать, и как обычно, интенсивно. Блестящие умственные способности и фантастическая работоспособность не покинули его вплоть до последнего дня.

18 сентября 1783 г. Эйлер провел как обычно. Он занимался математикой со своим внуком; производил вычисления, связанные с движением воздушного шара. Затем обсудил со своими учениками Фуссом и Лекселем недавнее открытие планеты Уран. Около 5 часов вечера почувствовал в голове какие-то изменения (это был инсульт), прежде чем потерять сознание, произнес: «Я умираю». В 11 часов вечера того же дня гения не стало.

Похоронен Леонард Эйлер был на Смоленском кладбище в Петербурге. Сейчас его останки покоятся в некрополе Александро-Невской лавры. Все трое сыновей и их дети остались в России.

Петербургская академия продолжала издание неопубликованных работ в течение еще 50 лет. Леонард Эйлер был самым плодотворным автором в математике за всю историю.

Теория чисел

Замечательно сказал великий русский математик П.Л. Чебышев: «Эйлером было положено *начало всех изысканий, составляющих общую теорию чисел*». У Эйлера был предшественник — Ферма. Но, по мнению Чебышева, «открытия Ферма служили только вызовом геометрам на изыскания в теории чисел... Эти изыскания требовали создания новых приемов, открытия новых начал, одним словом, основания новой науки. Это было сделано Эйлером».

Ферма оставил много сформулированных теорем, но не оставил их доказательств. До сих пор неясно, имел ли он их. Эйлер доказал или опроверг почти все теоремы Ферма. Он также ввел в рассмотрение новые методы в аналитической и аддитивной теории чисел.

Первая же теорема Ферма, к доказательству которой обратился Эйлер еще в первые годы своего пребывания в Петербурге, оказалась неверной. Ферма утверждал: *числа* $F_n = 2^{2^n} + 1$ *являются простыми для всех целых* n.

Эйлер проверил несколько значений n и обнаружил, что F_5 делится на 641. Это не так легко было сделать. Ведь число F_5 — 10-значно, и чтобы показать, что оно разложимо на множители, Эйлер проявил незаурядную изобретательность.

Малая теорема Ферма. *Если* p *— простое число и целое* a *не делится на* p, *то* $a^{p-1} - 1$ *делится на* p.

Доказав эту теорему, Эйлер ввел функцию $\varphi(m)$ — число целых положительных чисел, меньших и взаимно простых с m. Эйлер доказал, что $a^{\varphi(m)} - 1$ *делится* m. Этот результат является обобщением малой теоремы Ферма и отправной точкой для развития теории делимости, или, как сейчас говорят, теории сравнений, в последующих работах Эйлера.

Великая теорема Ферма. *Уравнение* $x^n + y^n = z^n$ *при* $n \geq 3$ *не имеет решения в целых взаимно простых числах.*

Заметим, что при $n - 2$ имеется бесконечная серия пифагоровых троек, представляющих решение. Очевидно, при любом n уравнение всегда имеет «тривиальные» решения $(m; 0; m)$, $(0; m; m)$ и $(m; -m; 0)$. Но они не рассматриваются из-за требования взаимной простоты. Эта одна из самых знаменитых математических проблем была решена лишь в 1995 г. Эйлер доказал это утверждение для $n = 3$ и $n = 4$ «методом спуска». Исследования Эйлера были продолжены Куммером, который доказал теорему Ферма для всех $n \leq 100$ и построил теорию идеалов, одну из важнейших областей современной теории чисел и алгебры.

ζ-функция Римана. Знаменитая функция, носящая имя Римана, была впервые введена Эйлером, причем, он не только ввел, но и показал ее важность в теории чисел. Все началось с вопроса, чему равна сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots? \qquad (1)$$

То, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходится, уже было установлено, а вот ответ на вопрос о сумме ряда (1) оставался неизвестным, несмотря на то, что эту задачу пытались решить Яков, Иоганн и Даниил Бернулли, а также Лейбниц, Муавр, Стирлинг и другие.

В 1735 г. Эйлер ввел в рассмотрение дзета-функцию

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots$$

и вычислил сумму ряда (1): $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. На этом Эйлер не остановился. Он вычислил также:

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450},\ \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93\,555},\ \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{628\,512\,875}.$$

И, вообще, нашел значение ζ-функции для любого четного аргумента: $\zeta(2n) = c_n\pi^{2n}$. Исследование характера коэффициентов c_n привело его к неожиданному открытию: числа c_n связаны с числами B_n Бернулли, которые важны в совсем других задачах.

Эти результаты были получены путем мастерски проведенных Эйлером головоломных манипуляций с бесконечными рядами. Хорошо известно, что с бесконечными рядами далеко не всегда можно обращаться так же свободно, как с конечным суммами. Понимая, что его методы не совсем обоснованны, Эйлер сопровождал эти трюки косвенными проверками правильности результата. Благодаря этому и своей гениальной интуиции Эйлер в манипуляциях с бесконечными суммами и произведениями никогда не допускал ошибок. Отметим удивительный факт; до сих пор почти ничего не известно о значениях ζ-функции при нечетных значениях аргумента. Одно из последних достижений в этом вопросе принадлежит молодому математику из МГУ Вадиму Зудилину: *по крайней мере одно из четырех значений* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ *и* $\zeta(11)$ *является иррациональным.*

Центральная работа Эйлера, связанная с ζ-функцией, появилась в 1737 г. В ней он открыл знаменитую теперь связь между ζ-функцией и простыми числами:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-p_i^{-s}} \cdot \ldots \qquad (2)$$

Справа в соотношении (2) стоит бесконечное произведение — мультипликативный аналог бесконечной суммы (p_i — i-е простое число).

Из соотношения (2) непосредственно следует *бесконечность числа простых чисел.* Действительно, если простых чисел было бы конечное число, то произведение справа было бы обычным произведением конечного числа множителей, которое при $s = 1$ было бы равно какому-то конкретному значению. В то же время при $s = 1$ ряд справа превращается в гармонический ряд, который расходится. Противоречие возникло из-за неверного предположения.

Первая реакция читателя: замечательно, но результат-то известен со времен Евклида. Однако значительно позже, уже в XIX в., Дирихле применил метод Эйлера для доказательства бесконечности числа простых чисел в любой арифметической прогрессии. Так как целые числа образуют частный случай прогрессии, то из теоремы Дирихле следует теорема Евклида, передоказанная Эйлером. Но методом Евклида нельзя доказать бесконечность числа простых чисел в произвольной прогрессии, что, как мы только что сказали, было сделано при помощи эйлеровского представления ζ-функции.

Геометрия

Выдающийся российский математик Б.Н. Делоне (1890–1980) писал: «Можно представить себе, каким откровением для математиков эпохи Эйлера явились работы Эйлера о кривизне поверхностей, о развертывающихся поверхностях, не говоря уже о том, что работы, в которых он рассматривает при помощи функций комплексной переменной общую теорию конформных отображений, несомненно должны были тогда казаться прямо-таки трансцендентной глубины».

Творчество Эйлера охватило всю современную ему геометрию. А его исследования по картографии привели к работам, которые предвосхитили новое направление в геометрии — внутреннюю геометрию. А всем известная теорема о многогранниках лежит у истоков нового направления в математике — топологии.

Прямая Эйлера. Удивительно, как математик, двигавший вперед всю математику XVIII в., заметил маленький бриллиантик, который проглядели великие греки. Приведем замечательную теорему, которую можно найти во многих книгах по элементарной геометрии:

Ортоцентр (*точка пересечения высот*) *треугольника, центр описанной окружности и центр тяжести* (*точка пересечения медиан*) *лежат на одной прямой* (*Эйлера*).

Теорема о многогранниках. *В выпуклом многограннике количества вершин, ребер и граней связаны соотношением* $В - Р + Г = 2$.

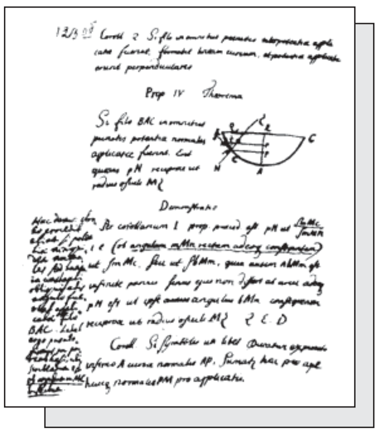
Эта работа была опубликована в издании Петербургской академии в двух статьях, в 1750 г. и 1752-м. В первой работе Эйлер не дает доказательства, но приводит легко вытекающие из него следствия, например:

$$Р + 6 \le 3В, \quad Р + 6 \le 3Г, \quad Г + 4 \le 2В, \quad В + 4 \le 2Г.$$

Авторское доказательство теоремы некоторые математики не считают удовлетворительным. Эйлер проводит его только для выпуклых многогранников, хотя эта теорема верна не только для них. А выпуклость — это свойство метрическое, но не топологическое. Во-вторых, в доказательстве после первого же отрезания вершины новый многогранник, вообще говоря, может оказаться невыпуклым. В действительности отрезание вершины всегда можно провести так, чтобы отрезанный кусок также был выпуклым. Но из текста работы неясно, думал ли об этом Эйлер?

Через полтора века теорема Эйлера была обобщена на 3-мерные многогранники любого рода (типа бублика (с одной дыркой) или кренделя, со многими дырками), а также на многогранники произвольной размерности. Эйлерова характеристика является первым топологическим инвариантом многогранника.

Знаменитая задача о кенигсбергских мостах, решенная Эйлером, тоже имеет топологический характер. Семь мостов в этом городе в XVIII в. были расположены так, что, как показал Эйлер, нельзя обойти все мосты, пройдя по каждому лишь раз. В современной теории графов граф, который можно обойти, пройдя через каждое ребро лишь по разу, называется *эйлеровым*.



Страница рукописи Л. Эйлера «О фигурах, которые должны принимать гибкие тела под действием произвольных сил» с пометками И. Бернулли

О неизометричности сферы и плоскости. Одна из основных задач картографии — составление плоской карты, как можно точнее отображающей географию местности, расположенной на сфере. В первой же работе по картографии Эйлер доказывает, что никакой, даже очень маленький кусочек сферы не может быть расправлен на плоскость. Говоря современным языком, Эйлер показал, что *сфера локально не изометрична евклидовой плоскости*. Эта работа Эйлера не только имела значение для картографии, она предвосхитила создание Гауссом *внутренней геометрии*.

Развертывающиеся поверхности. Итак, никакую часть сферы нельзя развернуть на плоскость. Возникает естественный вопрос: какие поверхности можно развернуть на плоскость? Такие поверхности называются *развертывающимися*.

Ясно, что боковая поверхность цилиндра или конуса после соответствующего разрезания ее вдоль образующей развертывается на плоскость. А какие еще? Знаменитая теорема Эйлера полностью отвечает на этот вопрос:

Поверхность, образованная касательными к пространственной кривой, является развертывающейся. И обратно, всякая развертывающаяся поверхность (если она не цилиндр и не конус) образована касательными к некоторой пространственной кривой.

В этой работе не только доказывается замечательная теорема, но и впервые вводится *линейный элемент поверхности* — важное средство для изучения криволинейных поверхностей средствами математического анализа. Помимо этого, Эйлер выводит явные формулы, связывающие две параметрические координаты точки на развертывающейся поверхности с тремя ее пространственными координатами.

Анализ

Эйлер рассматривал математический анализ как область математики, которая изучает функции. Даже простое перечисление результатов, идей, формул, которые содержатся в работах Эйлера, всего того, что сделал и написал по анализу, потребовало бы объема огромной статьи, если не книжки. Распространено мнение, что математический анализ, по существу, начинается с Эйлера. В 1747 г. он пишет книгу «Введение в анализ», в которой реализуя замысел И. Бернулли, уточняет определение функции. Здесь же он впервые представляет сообществу выдающуюся формул.

Формула века. Формулу

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (3)$$

Лагранж назвал её одним из самых прекрасных открытий XVIII в. Важнейшим моментом является открытие связи между показательной и тригонометрической функциями, если рассматривать эти функции в комплексной плоскости. Эту связь нельзя заметить, если рассматривать функции лишь на вещественной прямой. Разумеется, Эйлеру для получения формулы (3), нужно было прежде всего понять, как показательная функция, заданная на вещественной прямой, может быть распространена (или доопределена) для комплексной плоскости.

Еще более известно числовое равенство, которое получается из (3) при $\varphi = \pi$:

$$e^{\pi i} = -1.$$

Выдающийся математик и инженер-кораблестроитель академик А.Н. Крылов считал, что эта удивительная формула объединяет

Арифметику, представленной в ней -1,
Геометрию — из-за π,
Алгебру — из-за $i = \sqrt{-1}$,
Анализ, так как $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Эйлер и Ломоносов

Бесспорно, для российской науки творчество этих титанов — Леонарда Эйлера и Михаила Васильевича Ломоносова было основополагающим. Их имена в истории отечественной науки стоят первыми. Но об их взаимоотношениях написано мало, хотя развивались они весьма интересно.

Ломоносов был всего на 4 года младше Эйлера. Но жизнь сложилась так, что он пришел в науку на 12 лет позже Эйлера. Отчасти из-за этого их личное знакомство не состоялось. В 1736 г. Ломоносов в течение 8 месяцев обучался в Академическом университете и видел Эйлера, но в тот период ведущий профессор Петербургской академии не имел повода обратить внимание на студента. Потом Ломоносов был направлен в Германию для стажировки, откуда вернулся 8 июня 1741 г., в тот самый день (!), когда Эйлер покинул Россию на четверть века. Эйлер вернулся в Петербург в 1766 г. Михаил Васильевич же, проработав в Петербургской академии 24 года, умер за год до его возвращения. Тем не менее, и Эйлер, и Ломоносов хорошо знали работы друг друга и вели длительную переписку.

М.В. Ломоносов

Ломоносов со студенческих лет знакомился практически со всем, что выходило из-под пера Эйлера, а некоторые из его работ знал превосходно. Разумеется, Ломоносова интересовали в первую очередь не математические, а естественно научные работы. Но иногда корректуры и математических работ Эйлера (например, его объемной работы «Доказательства некоторых арифметических теорем») направлялись для просмотра Ломоносову. Михаил Васильевич также переводил многие работы Эйлера с латыни на русский.

Эйлер познакомился впервые с работой Ломоносова еще в 1739 г. В 1747 г. Петербургская академия направила Эйлеру в Берлин на отзыв несколько работ, в том числе и работу Ломоносова. В указе Академии по этому поводу говорилось: «Пиесы профессоров Ломоносова и Рихмана списавши (то есть сняв копии. — ***Н.Д.***) послать Академии членам Эйлеру, Бернулию и к другим, какое об оных мнение дадут и можно ли оные печатать». Эйлер очень скоро написал в высшей степени превосходный отзыв: «Все сии сочинения не токмо хороши, но и превосходны. Я должен отдать справедливость господину Ломоносову, что он одарован самым счастливым остроумием для объяснения явлений... Желать надобно, чтобы все протчие Академии были в состоянии показать такие изобретения, которые показал господин Ломоносов». После столь похвального отзыва Ломоносов попросил Эйлера вступить в постоянную переписку: «Не сомневаюсь, что для меня будет очень полезно, если Вы не сочтете меня недостойным беседовать с Вами посредством писем». Эйлер принял это предложение и сразу же посоветовал Ломоносову написать статью о природе селитры.

В 1754 г. их переписка прервалась. Вначале и Эйлер, и Ломоносов отвергли кандидатуры, представленные каждым из них на место профессора математики в Петербургской академии. Ломоносов пошел на это несмотря на то, что он чрезвычайно дорожил дружескими отношениями с великим математиком. Свое письмо в Академию от 7 мая 1754 г. по поводу возникших противоречий Ломоносов закончил так: «Сие прошу сообщить его сиятельству господину президенту, а господина Ейлера о том не уведомлять, затем чтобы дружба моя с ним не нарушалась». Эта «дружба» в виде переписки продолжалась еще некоторое время, хотя и не очень регулярно со стороны Ломоносова.

В это время в западных научных журналах появились критические обзоры нескольких работ Ломоносова. Критика была грубой и не всегда справедливой, что особенно огорчало автора. Он обратился к Эйлеру, который работал в Берлине и обладал огромным авторитетом, за помощью: «Подобно тому как Вы с особенною благосклонностью оказали мне помощь в моем отчестве, то не поскучайте защитить меня своим покровительством и в чужих странах». Эйлер, как всегда, ответил немедленно. В подробном сочувственном письме Эйлер оказал Ломоносову полную поддержку, похвалил его работы и отрицательно отозвался о нескольких берлинских критиках его работ. Это письмо ободрило Ломоносова. Но, к сожалению, он опубликовал это письмо без разрешения Эйлера, которого особенно огорчило то, что при публикации не были опущены упомянутые фамилии. Естественно, это осложнило и без того непростую жизнь Эйлера в Берлине. Их переписка прекратилась.

Несколько академических чинов старались очернить Ломоносова в глазах Эйлера. Однако великий математик по-прежнему видел в Ломоносове замечательнейшего ученого и похвально отзывался о глубине его идей. Ломоносов в свою очередь оказывал Эйлеру посильную поддержку со стороны Академии. Так, во время Семилетней войны (1756–1763), в конце сентября 1760 г. военные действия велись в Берлине. Имение Эйлера в Шарлоттенбурге (сейчас это бывшее предместье находится чуть ли не в центре немецкой столицы) серьезно пострадало по вине русского казачьего отряда. Этот неприятный эпизод не повлиял на симпатии Эйлера к России: «Я всегда желал, что если бы когда-либо суждено было Берлину быть занятым иностранными войсками, то пускай это были бы русские». Ему посоветовали, как члену «русской императорской Академии», обращаться в Академию с просьбой о возмещении причиненных убытков. Эйлер также написал письмо Ломоносову с надеждой, что «он не откажет в своем добром содействии». И Ломоносов «не отказал», помог; Эйлер получил всю необходимую помощь.

Позже Ломоносов не позволил напечатать в трудах Академии сочинение шведского ученого, содержавшее критику одной работы Эйлера по оптике. Сохранились также черновики письма Ломоносова Эйлеру, которое осталось недописанным из-за преждевременной кончины русского гения.

Эйлер и образование

В заключение кажется уместным сказать несколько слов о педагогических взглядах Эйлера, о том, что великий математик сделал для российского математического образования.

Естественно, что творчество гения сыграло большую роль в создании первоклассной петербургской математической школы. Достаточно назвать имена ее ведущих ученых: М.В. Остроградский, П.Л. Чебышев, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной, И.М. Виноградов, Ю.В. Линник.

При создании Петербургской академии бесспорно учитывался опыт ведущих научных учреждений Европы: Парижской академии наук, Лондонского королевского общества и др. Но на момент создания Академии в России не было ни ученых, ни университетов, ни людей с университетским образованием. Поэтому в отличие от европейских академий Петербургская академия была еще и учебным заведением. Приглашенные академики одновременно с исследованиями вели индивидуальные занятия с немногими так называемыми академическими студентами. Эйлер воспитал из них несколько будущих академиков. Он считал, что профессорские должности в Петербургской академии должны замещаться, по мере возможности, уроженцами России.

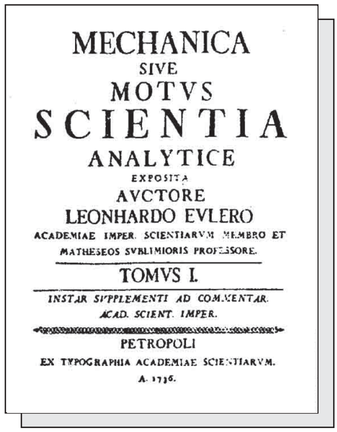
Для подготовки студентов была создана Академическая гимназия с программой, рассчитанной на пять лет. Эйлер для гимназии написал сначала «Руководство к арифметике», а затем замечательный, по отзывам, учебник алгебры «Универсальная арифметика». В 1737 г. Эйлер представил проект в комиссию, учрежденную для улучшения положения Академической гимназии. Этот проект, содержащий немало интересных мыслей, может быть предметом отдельной статьи. Приведем из него лишь несколько соображений. Одни из них вполне знакомы. «Учить всему надо легко, доступно и наглядно. Начинать обучение нужно с простейших основных начал, усложняя материал постепенно, изученное укреплять повторениями и упражнениями». А вот более оригинальное предложение. При пяти установленных в гимназии классах Эйлер предлагал «всякому ученику позволить так долго обучаться, как он сам желает». Конкретно, Эйлер предложил 10-летний курс обучения при пяти классах. Это означало бы, что способным учащимся разрешалось переходить ежегодно в старший класс, в то время как не слишком успевающие ученики могли учиться в этом классе еще год. Таким образом, в каждом классе оказывались бы вместе и «новички», которые проходят данный курс впервые, и «старички», которые остались в этом классе, чтобы повторить и тверже усвоить программу. Рекомендовалось организовать работу класса так. чтобы эти группы помогали друг другу. Но проект Эйлера не пригодился. Вскоре Эйлер уехал в Берлин, а реформирование Академической гимназии началось только после передачи ее под начало Ломоносова.

Завершая разговор о Леонарде Эйлере, еще раз подчеркнем, что это был гениальный ученый, на плечах которого, перефразируя Ньютона, стоит математика XIX и XX веков. Эйлер также был достойный семьянин и очень порядочный человек. Вспоминать, рассказывать о нем, о его работах важно не только по случаю юбилея.

А. ДОРОФЕЕВА,
Москва

О вкладѣ Эйлера въ развитіе математики

Научная деятельность Эйлера продолжалась почти 60 лет. Он успешно занимался математикой и механикой, физикой и астрономией. Восемнадцатый век по праву можно назвать веком Эйлера.



MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.
TOMVS I.
INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.
PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

Ведущую роль в системе наук XVIII в. играла механика. Ее математическим аппаратом была теория дифференциальных уравнений. Великий Ньютон, открывший законы движения, опубликовал их в «Математических началах натуральной философии» (1687), используя геометрический язык ученых Древней Греции. Необходимо было изложить механику аналитически с помощью дифференциального и интегрального исчисления, и это сделал Л. Эйлер. В 1736 г. он опубликовал двухтомный труд «Механика, или наука о движении, изложенная аналитическим методом».

В XVIII в. небесная механика была тесно связана с практической проблемой определения долготы в открытом море. Нужно было решить трудную задачу о движении Луны относительно Солнца и неподвижных звезд. На основе теории, построенной Эйлером, были составлены лунные таблицы, которые широко использовали мореплаватели вплоть до 1915 г., когда их вытеснили радиосигналы.

В математике XVIII в. доминирующее положение занимал математический анализ. Эйлер опубликовал двухтомное «Введение в анализ бесконечных» (1748), «Дифференциальное исчисление» (1755), трехтомное «Интегральное исчисление» (1768–1770). Из 30 томов математической серии, входящих составной частью в собрание сочинений, 19 составлены из работ по дифференциальному и интегральному исчислению.

Центральным в математическом анализе является понятие функции. В предисловии к книге «Введение в анализ бесконечных» Эйлер писал: «Весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций». С помощью функций математика изучает зависимость между величинами, их взаимосвязь.

Со времен Древнего Египта и Древнего Вавилона составлялись обширные таблицы для возведения чисел в квадрат и в куб, извлечения квадратных корней, тригонометрические таблицы. Именно в виде таблиц функции впервые вошли в математику. Для античной науки функциями являлись кривые линии. Сначала это были прямые и окружности. Затем к ним добавились конические сечения (эллипсы, параболы, гиперболы) и многочисленные механические кривые, которые задавались с помощью движения (квадратриса, конхоида, спираль Архимеда).

В XVII в., когда создавалась математика переменных величин, в науку вошло большое число новых кривых (циклоида, улитка Паскаля, логарифмическая спираль, синусоида), изучая которые математики решали задачи на проведение касательных и нормалей, на вычисление площадей, длин кривых, объемов тел вращения.

В конце XVIII в. Г.В. Лейбниц ввел термин «функция», а Иоганн Бернулли дал ему определение: «Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных».

Л. Эйлер сформулировал определение следующим образом: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного и чисел или постоянных количеств». Независимая переменная x могла принимать у Эйлера как действительные, так и мнимые значения, тем самым он ввел в рассмотрение функции комплексного переменного. Эйлер писал: «Переменное количество охватывает собою решительно все числа — как положительные, так и отрицательные; как рациональные, так и иррациональные и трансцендентные. Даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменного количества». Постоянным Эйлер придавал только действительные значения.

Эйлер изучил многие понятия, относящиеся к функциям, которые мы используем сейчас. Он разделил функции на явные и неявные, на однозначные и многозначные, выделил классы четных и нечетных функций, ввел понятие обратной функции: «Если y будет какой-либо функцией z, то и, обратно, z будет функцией y. Может случиться, что хотя y будет однозначной функцией z, однако z будет многозначной функцией y». Кроме этого, Эйлер рассмотрел функции многих переменных.

И. Бернулли предложил записывать функцию в виде φx (еще без скобок). Скобки, как и знак f, ввел Эйлер: $y = f(x)$.

Обратим внимание на то обстоятельство, что именно Эйлеру мы обязаны теми определениями и терминам, на которых в наши дни основывается преподавание математического анализа в средней школе. Он разработал классификацию функций, принятую сегодня.

Логарифмы были изобретены в XVII в. и в науке использовались в виде таблиц логарифмов. Эйлер начал с определения показательной функции $y = a^x$, а затем ввел логарифмическую функцию следующим образом: если $a^x = N$, то $x = \log_a N$. Эйлер поясняет, что число a должно быть положительным, отвергая функции вида $y = (-1)^x$. Далее Эйлер пишет: «После логарифмов и показательных количеств следует рассмотреть дуги круга, а также их синусы и косинусы». Он приводит формулы, которые и сейчас содержатся в учебниках по тригонометрии:

$$\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right),\ (\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1,\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Он записывает формулы приведения, формулы для вычисления величин $\sin(y \pm z)$, $\cos(y \pm z)$ и другие.

Эйлер совершает переворот в тригонометрии. До него в течение многих столетий тригонометрические функции входили в математику в виде таблиц, созданных для нужд астрономии; в качестве приложений и объяснений к таблицам приводились формулы сферической тригонометрии. Эйлер ввел в математику привычные нам формулы тригонометрии на плоскости. Логарифмы и тригонометрию в средней школе изучают до сих пор по Эйлеру.

Во «Введении в анализ бесконечно малых» в 1748 г. Эйлер впервые ввел в математику формулу

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

связывающую показательную и тригонометрические функции.

Комплексные числа вошли в математику в XVI в. Однако долгое время не существовало их интерпретации, была неясна природа этих чисел. В то же время математики стремились привлечь комплексные числа к решению конкретных задач математической физики. Лейбниц, И. Бернулли и Эйлер использовали мнимые числа для интегрирования дифференциальных уравнений. Даламбер и Эйлер показали, что комплексные числа полезны в решении задач гидродинамики.

Творчество Эйлера оказало огромное влияние на развитие математики в России. Знаменитая Петербургская математическая школа XIX в. была по существу научной школой Эйлера–Чебышева. Основной ее принцип заключался в том, чтобы исходя из трудной задачи, которую ставит наука или техника, построить глубокую математическую теорию, а решение математической задачи всегда доводить до результата, удобного для практики.

Результаты, полученные Эйлером, используются в современных математических теориях, относящихся, например, к космическим исследованиям. В частности, для управления летательными аппаратами необходимо отыскать наилучшее, или, как говорят, оптимальное управление. В теорию таких задач, называемых экстремальными, большой вклад внес Л. Эйлер. Он писал: «В мире не происходит ничего, в чем бы не был виден смысл какого-нибудь максимума либо минимума». История же вопроса такова.

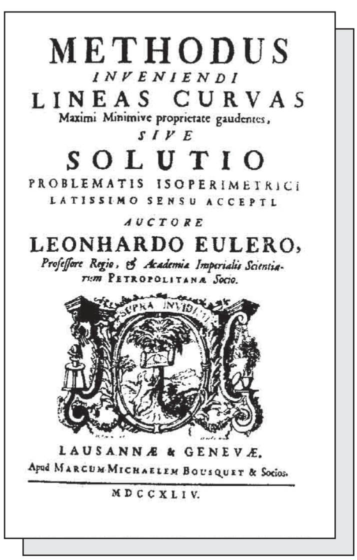
Еще в Древней Греции было доказано, что среди плоских замкнутых кривых, имеющих заданную длину, наибольшую площадь охватывает окружность. Круг был символом геометрического совершенства. В XVII в. начался период математики переменных величин, в математическом анализе были найдены методы отыскания максимумов и минимумов функций. И сразу же возникла гораздо более общая задача — отыскание экстремумов функционалов. В 1696 г. И. Бернулли поставил задачу о брахистохроне — кривой линии, падая по которой под действием силы тяжести тело M опустится из одной данной точки в другую за кратчайшее время. Был объявлен конкурс среди математиков. Задачу решили Яков и Иоганн Бернулли, Лейбниц и Ньютон. Кривой наикратчайшего спуска (брахистохрона) оказалась циклоида.

Л. Эйлер в 1726–1744 гг. разработал общий метод решения экстремальных задач. В качестве предмета исследования он выделил не решение отдельных задач, а построение общей теории, которую впоследствии назвал вариационным исчислением. В 1744 г. был опубликован трактат Л. Эйлера «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле», в котором решены как все поставленные к этому времени вариационные задачи, так и многие другие, в том числе большое число задач механики.

Это был огромный прогресс в исследовании проблемы экстремумов функционалов. Но Эйлер не был удовлетворен. Понимая важность задачи, он в течение многих лет искал новый метод, который был бы менее громоздким. Эйлер даже указал в своем трактате путь, по которому нужно идти для усовершенствования математического аппарата. И по этому пути пошел Лагранж, создавший метод вариаций.

В 1755 г. в письме к Эйлеру он впервые изложил новый метод решения экстремальных задач. В это время Эйлер был уже всемирно известным ученым, а Лагранжу было девятнадцать лет, и он еще не опубликовал ни одной работы. Эйлер немедленно ответил на письмо Лагранжа, между ними установилась переписка, продолжавшаяся много лет.

Уже в 1756 г. Эйлер сообщил Берлинской академии о двух работах, развивающих метод вариаций. Но он не спешил с их публикацией. В письме от 2 октября 1759 г. Эйлер писал Лагранжу, что не хочет уменьшать его заслуг: «Я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобой славы».



METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

Лагранж изложил метод вариаций в статье 1760 г. и сразу же решил с его помощью большое число задач динамики. В 1788 г. он опубликовал «Аналитическую механику», в которой использовал всю мощь математического аппарата, созданного Ньютоном, Эйлером, Даламбером.

В XX в. методы, созданные Эйлером и Лагранжем, легли в основу теории оптимального управления, в центре которой «принцип максимума» Л.С. Понтрягина. Исследования Л. Эйлера в области решения экстремальных задач нашли продолжение в математике нашего времени.

Т. ПОЛЯКОВА,
г. Ростов-на-Дону

Эйлеръ и россiйское математическое образованiе

Мне достаточно часто приходится выступать перед математиками и методистами-математиками по проблемам истории отечественного математического образования и произносить фразу: «Леонард Эйлер — не только великий математик, но и выдающийся для своего времени методист». Эйлер — методист-математик? Очень сомнительно! Именно так обычно реагируют современные математики на мои выступления и публикации, в которых я провожу эту «крамольную» мысль. Более того — говорю о методической школе Эйлера. И аргументируют эту сомнительность.

Первый аргумент: «Методики математики как науки во времена Эйлера еще не существовало. Вы же сами в статье в журнале «Математика в школе» связываете ее зарождение с именем С.Е. Гурьева и периодом конца XVIII — начала XIX в. К тому времени Эйлер уже ушел от нас».

Отвечаю: это все так. Но по такой логике и математики до Евклида не существовало. С незапамятных времен, в рамках древних цивилизаций развивалась единая, нерасчлененная наука, тем не менее мы совершенно обоснованно говорим о математике Древнего Египта, Древнего Вавилона, Древнего Китая, Древней Индии. Да, оболочка, форма до определенного времени существовала более широкая, но суть, содержание математическое развивалось, и очень активно, значительно опережая логически представимое. Один пример: очень раннее решение задач на прогрессии; человечеству было нужно уметь предвидеть результаты процессов естественного размножения, оно изобрело математические способы их подсчета. Так что методики математики во времена Эйлера действительно еще не существовало, но методической деятельностью математики занимались, начиная со знаменитой «Арифметики» Л.Ф. Магницкого, которая обладает рядом несомненных методических достоинств. Основная цель этой статьи — показать, какие идеи методического характера выразил Эйлер, что он сделал как методист-математик.

Второй аргумент: «Эйлер — великий математик, не до того ему было, чтоб заниматься такими мелочами, как методика». Отвечаю: великим он стал со временем. В 1727 г., прибыв двадцатилетним юношей в Петербург, Эйлер начал преподавать в университете и гимназии (их мы далее будем называть академической образовательной системой) при только что созданной по указу Петра I (и уже после его смерти) Петербургской академии наук.

Вообще, по моему мнению, пренебрежительное отношение ученого-математика к занятиям тем, что мы называем сейчас методикой, развилось ближе к XX в. До этого же практически все первоклассные отечественные математики (например, Н.И. Лобачевский, М.В. Остроградский, П.Л. Чебышев) значительное внимание уделяли методике, в том числе и занимая важные государственные должности, предполагающие такого рода занятия. Более того, я смею предполагать, что класс математика-ученого во многом определяется его интересом к проблемам обучения математике, подготовки смены. Как-то так получается, что наиболее яркие из выдающихся математиков тесно связаны с проблемами обучения математике (например, А.Н. Колмогоров знаменит и реформой математического образования).

Сохранились отзывы современников Эйлера, подтверждающие большое внимание ученого к проблемам преподавания. Так, в траурной речи его первого биографа, академика-секретаря Петербургской академии наук Н.И. Фусса, Эйлер характеризуется как «великий муж, прославивший век свой просвещением рода человеческого». В этой же речи Фусс, имея в виду создание Эйлером учебников, отмечает, что «великий геометр не вменял себе за унижение трудиться над сочинением, которое было ниже сил его, но важно по намерению, с которым было написано».

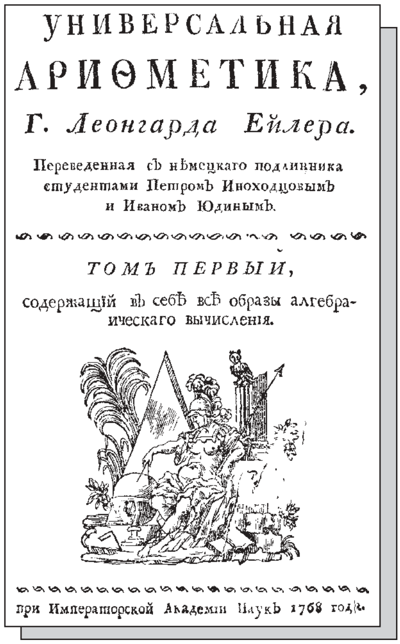
Охарактеризуем вкратце методические идеи и деятельность Л. Эйлера в академической образовательной системе. Напомню, что она состояла из гимназии и университета при Петербургской академии наук. Ко времени основания Петербургской академии наук из-за рубежа для работы в ней было приглашено 18 академиков, 7 из которых — математики. Надо признать, что большинство академиков не слишком ревностно относились к своим обязанностям, особенно связанным с преподавательской деятельностью.

Эйлер же проявил себя прекрасным и очень добросовестным педагогом. Вот как он сам характеризует выполнение такого рода обязанностей в отчете, написанном 28 августа 1737 г.: «По условиям своей службы в Императорской академии наук я обязан был выполнять следующее: Читать студентам лекции по высшим разделам математики. Это я также всякий раз, как объявляются такие студенты, которые желают обучаться этому предмету, по их возможностям исполняю». В каталоге университетских лекций указывается:

— за 1732 г.: «Л. Эйлер, профессор теоретической и экспериментальной физики, имея поручение преподать физику, намерен излагать по понедельникам, средам и четвергам теорию физики, а по пятницам иллюстрировать теорию опытами»;

— за 1734 г.: «Леонард Эйлер, профессор высшей математики, от 2 до 3 часов пополудни будет излагать ученикам курс математики».

В 1738 г. Эйлер читал публичные лекции по логике и высшей математике. На них приглашались, кроме студентов университета, слушатели Морской академии, Сухопутного шляхетного корпуса и других школ. С просветительской целью Эйлер писал научно-популярные статьи для «Примечаний» к «Петербургским ведомостям».


УНИВЕРСАЛЬНАЯ
АРИΘМЕТИКА,
Г. Леонгарда Ейлера.
Переведенная съ нѣмецкаго подлинника
студентами Петромъ Иноходцовымъ
и Иваномъ Юдинымъ.
ТОМЪ ПЕРВЫЙ,
содержащій въ себѣ всѣ образы алгебраическаго вычисленія.
при Императорской Академіи Наукъ 1768 года.

Но особенно большое внимание в первый период пребывания Эйлера в Петербурге он уделял академической гимназии. Так, Эйлер участвовал в работе комиссии, учрежденной в 1737 г. для улучшения работы гимназии. Им представлена пространная записка, в которой предложен проект системы обучения. Охарактеризуем ее основные принципы.

1. Преемственность между гимназическим и университетским образованием. «Главная задача гимназии, — писал Эйлер, — приготовить университетских слушателей, и весь учебный план должен получить направленный к этой цели характер».

2. Прагматический характер обучения. Прохождение полного курса гимназии Эйлер считал необязательным, полагая, что можно прекращать занятия, если учащийся приобрел достаточные для его будущей профессии знания.

3. Бессословность и бесплатность обучения. Доступ в гимназию, по мнению Эйлера, должен быть открыт всем, а обучение — бесплатно, так как в этом заинтересовано прежде всего само государство. Однако он признавал необходимость отдельного обучения дворян и детей всех прочих сословий: «...те, которые не то, чтобы бедные, — писал Эйлер, — но происходят из низкой черни, получают плохое воспитание и обычно имеют скверные нравы. Поэтому представляется необходимым сделать различие в месте для сидения, либо каким-нибудь другим образом, так, чтобы хорошо воспитанные не имели общения с плохо воспитанными и не могли бы подпасть под дурное влияние».

4. Эйлер предлагал единую десятилетнюю продолжительность обучения с разделением на 5 двухгодичных классов. Возраст учащихся — от 5 до 15–16 лет.

5. Необходимость создания учебников, соответствующих возрасту и развитию гимназистов.

Л. Эйлер предложил и свой проект программы гимназического курса. Прежде всего, он включал в него изучение языков — латинского, как международного научного языка того времени (впрочем, Эйлер предостерегал от чрезмерного увлечения латынью), и немецкого, так как он был родным языком многих учителей гимназии. После языков основополагающее значение Эйлер отводил математике. «За языками, — писал он в проекте переустройства гимназии, — следуют математические науки, из которых элементарные и наиболее необходимые в обычной жизни должны основательно изучаться в гимназии». Но основную цель изучения математики Эйлер формулирует значительно более широко: «Из их изучения не только каждый извлечет большую пользу, какую бы деятельность он впоследствии ни выбрал, но основательный и верный метод преподавания просветит его разум и сделает его способным во всех науках отличать недосказанное от твердо усвоенного, истинное от ложного». По обычаям того времени, полагаясь на монаршую волю больше, чем на логические аргументы, Эйлер добавляет: «Кроме того, безусловное приказание ее имп. Величества гласит, чтобы было уделено особое внимание преподаванию решительно всем ученикам арифметики и геометрии».

Итак, Эйлер считает, что из математических дисциплин в академической гимназии прежде всего должны изучаться арифметика и геометрия. Кроме этих разделов математики, по мнению Эйлера, целесообразно специально изложить учение о шаре, так как оно необходимо «для отчетливого понимания географических карт и исторической географии».

Понимая, что успехи преподавания во многом зависят от учебников, Эйлер считал необходимым повысить их качество. Причем в преподавании математики Эйлер впервые в отечественном школьном образовании пришел к необходимости не только заучивать правила и применять их при решении задач, но и по мере возможности приводить их логические обоснования. В проекте переустройства академической гимназии Эйлер так изложил требования к учебникам математики:

— «Арифметика должна преподаваться по хорошему учебнику; молодежи следует не только сообщить простые правила арифметики, но, по мере возможности, приводить обоснования этих правил...»;

— «Подобным же образом обстоит дело с геометрией, которую следует основательно изучать с помощью хорошего учебника. Первоначально надо сообщить ученикам определения и показать геометрические фигуры, а затем перейти к теоремам и доказательствам»;

— «...необходим также хороший учебник по тригонометрии, в котором должны быть изложены основы тригонометрии и описаны различные способы измерения и вычисления фигур»;

— «...потребуется также учебник о шаре; в этом учебнике должно быть дано математическое объяснение различным природным явлениям Земли, климатам и временам года».

Итак, в проекте преобразования академической гимназии Эйлер охарактеризовал основополагающее значение математики в гимназическом образовании, вычленил основные математические дисциплины и сформулировал требования к учебным пособиям по этим дисциплинам.

Проект, представленный комиссией, был весьма прогрессивным для того времени, во многом предвосхищая реформы гимназического образования, проведенные только в начале XIX в. К сожалению, он не был утвержден и поэтому во многом оказался неосуществленным. Однако ту часть проекта, реализация которой зависела только от него самого, Эйлер с присущей ему энергией начал претворять в жизнь.

Речь идет о создании учебных пособий по математике. Эйлер выдвигает чрезвычайно прогрессивные методические принципы гимназического преподавания математики, которые подробнее раскрыты нами далее. Основной из них на современном языке можно охарактеризовать как сочетание принципов научности и доступности. Он отвергает как чисто практические курсы математики, так и излишнюю формализацию в изложении математических дисциплин, которая была присуща, в частности, учебным пособиям популярного в то время немецкого математика и педагога Х. Вольфа. Кроме того, Эйлер минимизировал количество математических дисциплин, ограничив арифметикой, алгеброй, геометрией и тригонометрией, и был сторонником систематического их изложения. Эти идеи Леонард Эйлер воплотил в ряде учебных пособий по математике, написанных специально для школьного ее изучения, преимущественно в академической гимназии.

По арифметике Эйлер написал «Руководство к арифметике для употребления в гимназии императорской Академии наук». К сожалению, пособие осталось незавершенным из-за отъезда автора в Берлин. Оно явилось прототипом для всех последующих отечественных, а возможно и не только отечественных, учебников арифметики.

Эйлеровское учебное пособие по алгебре известно в отечественной литературе как «Универсальная арифметика». Несмотря на то, что его математическое содержание значительно превосходит потребности школы того времени, прекрасный отбор материала и особенно доступный язык изложения сделали это пособие одним из самых популярных для своего времени. Эйлер задумал «Универсальную арифметику» как книгу, по которой читатель мог бы самостоятельно изучить основы алгебры. Существует легенда-быль, что сделать это ему удалось уже в процессе написания книги. Потеряв зрение, он надиктовывал книгу по алгебре мальчику-слуге, который прежде был портным, не имевшим понятия о математике. В процессе работы над книгой он не только понял все, что диктовал ему великий слепой, но в скором времени был в состоянии самостоятельно совершать все самые трудные вычисления и решать задачи, которые ему предлагались.

Эйлер намеревался написать учебник по элементарной геометрии, который, по всей видимости, все же не был им написан. Сохранившиеся фрагменты говорят о том, что Эйлер стремился сочетать научность изложения с его доступностью.

Учебник по тригонометрии также не был написан Эйлером. Однако именно он создал современную теорию тригонометрии, разработав не только высшие ее разделы, но и те, которые изучаются в школе. До Эйлера тригонометрические функции не рассматривались единым образом как функции числового аргумента — рассматривались тригонометрические линии в круге произвольного радиуса, не было ясности в вопросе о знаках синуса, косинуса и тангенса в зависимости от четвертей круга, не существовало единых обозначений. Подавляющее большинство теорем доказывалось не в общем виде, а преимущественно на основе наглядных соображений. Эйлер впервые:

— рассматривает синус, косинус и тангенс как функции произвольного аргумента (в том числе комплексного);

— вводит круг единичного радиуса, что позволяет упростить все формулы;

— решает вопрос о знаках тригонометрических функций;

— выводит формулы приведения для углов, больших $90°$;

— упрощает все записи, введя единообразные обозначения тригонометрических функций;

— систематизирует «формульную тригонометрию», отправляясь от нескольких основных формул.

Итак, Эйлер внес свою лепту во все школьные математические предметы. Вне зависимости от того, имеется ли учебник Эйлера по конкретной математической дисциплине, содержание школьного математического образования в России в течение почти трех столетий в немалой степени строилось «по Эйлеру».

Особо отметим, что Эйлер не ограничился практической методической деятельностью, но в какой-то мере заложил теорию методики обучения математике, формулируя цели математического образования, принципы построения обучения математике, требования к учебникам математики.

Но главное, как мне представляется, заключается в том, что Эйлером основана первая в истории России математико-методическая школа. Я считаю, что во второй четверти XVIII в. возникло и стало играть все возрастающую роль в развитии математического образования явление надсобытийное, не имеющее официально признанного статуса, определенной формы, более того, по сути своей неформальное. Речь идет о явлении сугубо интеллектуальном, уникальном, практически единственном в истории отечественного математического образования — о методико-математической школе, основателем которой явился Леонард Эйлер[1].

Это явление во многом и относительно надвременное, ибо, имея четкие временные границы снизу (начало педагогической деятельности Эйлера), оно очень сложно ограничивается сверху: идеи методической школы Эйлера развивались весь XVIII в. и во многом продолжали сохранять свое значение в веке XIX. За-

[1] Аналогом может служить, пожалуй, лишь методическая школа А.Н. Колмогорова во второй половине XX в.

мечу к тому же, что название, данное мною этому явлению, достаточно условное, в определенной мере внеисторическое, так как методика математики как наука (мы уже говорили об этом) родилась значительно позже. Все же по сути это явление методико-математическое. Поэтому, понимая всю приблизительность этого названия, я остановилась именно на нем.

Первый историограф Академии наук П.П. Пекарский так писал о роли учеников и последователей Эйлера в развитии математического образования в России: «Безошибочно можно сказать, что нынешнее преуспеяние математических наук в наших учебных заведениях много обязано Академии наук, так как Эйлер, умирая, оставил семь даровитых последователей, считавших за честь себе называться его учениками и бывших не только кабинетными учеными, но и лучшими наставниками в тогдашних учебных заведениях Петербурга».

Из учеников Эйлера, по крайней мере, С.К. Котельников, С.Я. Румовский, М.Е. Головин и Н.И. Фусс оставили заметный след в истории российского математического образования. Они и составили костяк методической школы Эйлера. Ее можно считать первой методической школой России, так как Л.Ф. Магницкий практически был методистом-одиночкой. Более того, единственный из его учеников и последователей Н.Г. Курганов развивал не только методические идеи Магницкого, но и Эйлера и фактически принадлежит к его методической школе.

Охарактеризуем подробнее глубокое влияние учебников и научных трудов Эйлера на создание отечественной учебной литературы по математическим и связанным с ней наукам. Его «Руководство к арифметике» положительно отразилось на преподавании арифметики во многом благодаря популярным учебникам преподавателя Морского кадетского корпуса Н.Г. Курганова. «Универсальная арифметика» Эйлера стала прообразом всех последующих школьных учебников алгебры, начиная с Н.И. Фусса и Т.Ф. Осиповского и кончая А.П. Киселевым. М.Е. Головин издал «Плоскую и сферическую тригонометрию с алгебраическими доказательствами» на основе оригинальных научных мемуаров и книг Эйлера, посвященных тригонометрии. Во втором томе перевода «Сокращений первых оснований математики» Х. Вольфа (СПб.: 1771) С.К. Котельников представил первое на русском языке изложение введения в анализ, а также дифференциального и интегрального исчисления, в основе которого лежали фундаментальные исследования Эйлера. Труды Эйлера по механике явились основой другого учебника Котельникова — «Книге, содержащей в себе учение о равновесии и движении тел» (СПб.: 1774). Сочинения Эйлера по математическому анализу и аналитической геометрии служили классическими образцами для составителей учебных руководств по этим предметам. Представляется крайне затруднительным перечислить отечественных и зарубежных авторов учебников, черпавших материалы из научных трактатов Эйлера. Невозможно удержаться от соблазна привести в этой связи знаменитую фразу, приписываемую Лапласу: «Читайте, читайте Эйлера, он — наш общий учитель».

Обобщим методические идеи Эйлера, которые частично уже охарактеризованы ранее.

1. Достаточно четкое выделение из школьной математики арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии, которые в дальнейшем становятся общепризнанным классическим набором дисциплин для средней школы и получают название элементарной математики.

2. Создание учебников по этим дисциплинам, в которых материал излагается систематически, то есть таким образом, чтобы математические предложения образовывали стройную систему, в основе которой лежат логические доказательства, а также разумно сочетаются теория и практика.

3. Преодоление схоластики и формализма, господствовавших в доэйлеровских учебниках математики: оптимальное сочетание научности и доступности в изложении материала.

4. Создание русской математической терминологии, сочетающей общепризнанные иностранные с удачными русскими терминами.

Итак, начиная со второй четверти XVIII в. фундаментальным фактором развития отечественного математического образования становится методическая школа Л. Эйлера. Зона действия этого фундаментального фактора чрезвычайно широка — практически все образовательные системы, функционирующие в это время. Временной диапазон трудно поддается ограничению — практически влияние методических идей Эйлера ощущается и поныне.

Литература

1. *Белый Ю.А.* Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии//Историко-математические исследования. — Вып. XIV. — М.: 1961.

2. История Академии наук СССР. В 3 т. — Т. 1. — М.–Л., 1958.

3. История отечественной математики. В 4 т. — Т. 1. — Киев: Наукова думка, 1966.

4. *Копелевич Ю.Х.* Эйлер — член Петербургской академии наук//В кн.: Леонард Эйлер (1707–1783). — М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1935.

5. *Кулябко Е.С.* Педагогические воззрения Леонарда Эйлера//В кн.: Леонард Эйлер. — М.: 1958

6. *Пекарский П.* История императорской Академии наук. В 2 т. — Т. 1. — СПб.: 1870.

7. *Полякова Т.С.* Зарождение отечественной методики математики на рубеже XVIII–XIX вв.//Математика в школе, 2000, № 9.

8. *Полякова Т.С.* История математического образования в России. — М.: Изд-во Московского ун-та, 2002.

9. *Полякова Т.С.* История отечественного школьного математического образования. Два века. Кн. I: Век восемнадцатый. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГПУ, 1997.

10. Похвальная речь Эйлеру Николая Фусса//В кн.: Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. — М.: Наука, 1988.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта 05-03-03023а «Леонард Эйлер и математическое образование в России».

Окружѣніе Эйлера

ЭЙЛЕР, Иоганн Альбрехт, старший сын Л. Эйлера. Родился в Петербурге 27 ноября 1734 г. Член Берлинской академии. В 1758–1759 гг. — инспектор королевской обсерватории, где и сам много работал, в частности наблюдал и описал появившуюся комету. С 1766 г. — профессор физики в Петербургской академии, куда переехал вместе с отцом. С 1769 г. — секретарь конференц-коллегии Академии наук. Член научных обществ и академий: Мюнхенской (1762), Петербургского экономического общества (1766), Стокгольмской (1771), Флиссингенской (1775). Лауреат семи научных премий (Петербургской, Парижской, Мюнхенской академий и Гёттингенского научного общества). Умер в 1800 г.

ЭЙЛЕР, Карл, второй сын Л. Эйлера. Родился в 1740 г. в Петербурге. Занимался с отцом точными науками и философией, затем интересовался медициной. В университете Галле получил степень доктора медицины (1762). В 1766 г. вместе с отцом отправился в Петербург, где был принят на императорскую службу. С 1772 г. — медик императорской АН. Умер в 1790 г.

ЭЙЛЕР, Христофор, третий сын Л. Эйлера. Родился в 1743 г. в Берлине. Занимался точными науками под руководством отца и старшего брата. Увлекся военной карьерой. Сопровождал в походах прусского короля Фридриха II. На русской службе был произведен в майоры и назначен начальником Сестрорецкого оружейного завода. Участвовал в войне против турок. Позднее был произведен в генерал-лейтенанты. Умер в 1812 г.

ГОЛОВИН, Михаил Евсеевич, адъюнкт Академии наук, позднее — профессор учительской семинарии. Племянник М.В. Ломоносова, распорядившегося незадолго до своей смерти «учить его латинскому языку, арифметике, чисто и хорошенько писать и танцевать». Родился в 1756 г. в Архангельской губернии. Будучи студентом академического университета, изучал математику под руководством Эйлера — именно таким методом, как некогда самого Эйлера учил И. Бернулли. Эйлер к этому времени уже ничего не видел — и Головин записывал с его слов или просто под диктовку очередные сочинения Эйлера. В «Протоколах заседаний» Академии говорилось, что «...академик Эйлер, воздав заслуженную похвалу усердию... просит поощрить его повышением оклада жалованья». Вскоре по настоянию Эйлера Головин утвержден адъюнктом Академии. Головин перевел на русский язык «Морскую науку» и часть «Введения в анализ» Эйлера, а также ряд других работ. Позднее Головин работал в учительской семинарии и других учебных заведениях. Умер в 1790 г.

ГОЛЬДБАХ, Христиан, математик. Родился в 1690 г. в Кенигсберге (ныне Калининград) в семье пастора. Окончил юридический факультет Кенигсбергского университета. Увлекался математикой. Много путешествовал, был лично знаком с Лейбницем, Н. Бернулли и другими выдающимися учеными. Один из первых членов Петербургской академии. В первых изданиях Петербургской академии опубликовал ряд статей по математике. С 1742 г. жил в Москве, работал в Министерстве иностранных дел. Математикой занимался для удовольствия. С 1729 г. до самой смерти постоянно переписывался с Эйлером, главным образом по математическим проблемам. Умер в 1764 г.

ИНОХОДЦЕВ, Петр Борисович, математик, астроном, филолог, академик. Родился в 1742 г. Перевел на русский язык «Элементы алгебры« Эйлера, выпущенные в 1768–1769 гг. под названием «Универсальная арифметика« (совместно с И. Юдиным). В 1769 г. по поручению Эйлера наблюдал в Гурьеве редкое астрономическое явление — прохождение Венеры по диску Солнца. Определил географические координаты некоторых городов России. Позднее участвовал в составлении толкового словаря русского языка (совместно с С.К. Котельниковым и др.). Умер в 1806 г.

КОТЕЛЬНИКОВ, Семен Кириллович, академик. Родился в 1723 г. в Петербурге. В 11 лет поступил в школу Ф. Прокоповича, знаменитого сподвижника Петра I.

В 1738 г., после закрытия школы, переведен в Александро-Невскую семинарию, затем в академическую гимназию, а из нее — в академический университет. По свидетельству профессора Рихмана, «проявил большое усердие» в математике, ее приложениях, а также в латыни. Эти успехи послужили основанием, чтобы отправить его в обучение «к искусному геометру» — в Берлин к Эйлеру. Успехи Котельникова в изучении математики оказались блистательными. Эйлер писал, что так как Д'Аламбер — мировое светило тогдашней математики — не согласится, разумеется, занять кафедру высшей математики в Петербурге, то никого в Европе сильнее Котельникова он рекомендовать не может. В декабре 1756 г. Котельников был утвержден экстраординарным профессором высшей математики, а четыре года спустя — ординарным академиком. Однако Котельников интересовался также и языкознанием и способствовал успешному составлению толковых словарей.

Котельников — первый из русских математиков, работы которого имели самостоятельное значение в науке. Несмотря на это, он в 1796 г. был отчислен от Академии и назначен... цензором. Впрочем, Котельников оставался академиком и получал академическую пенсию. Умер в 1806 г.

Окончание см. на с. 30

В. БУСЕВ,
Москва

«Руководство къ ариѳметикѣ» Леонарда Эйлера

Леонард Эйлер оставил после себя не только научные труды, но и написал ряд учебников по математике, предназначавшихся воспитанникам академической гимназии. Первый из этих учебников называется «Руководство к арифметике для употребления гимназии при Императорской Академии наук».

Курс арифметики Эйлер представлял состоящим из четырех частей:

1) действия над целыми положительными числами и обыкновенными дробями;

2) «употребление оных действий при разных деньгах, мерах, весах и прочих тому подобных вещах»;

3) арифметические правила, которые применяются при решении задач (тройное, товарищества и др.);

4) десятичные дроби, корни, логарифмы.

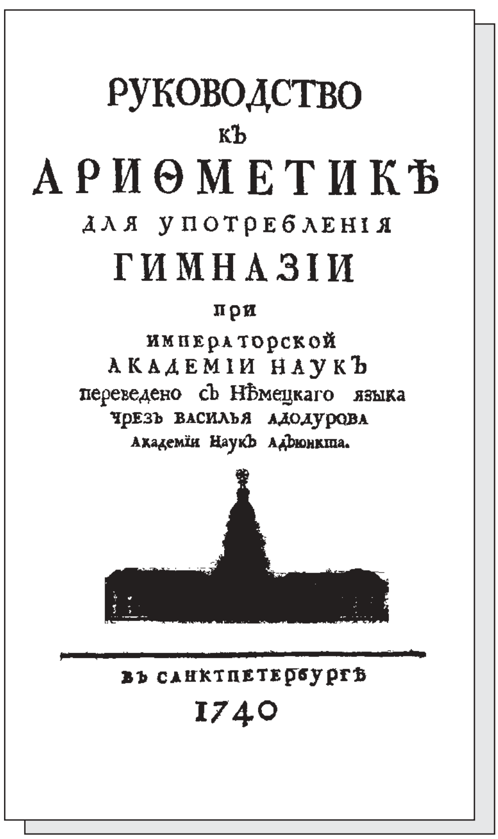
К сожалению, написаны были только первые две части, которые составили соответственно две книги «Руководства к арифметике». Остальное не было выполнено в связи с отъездом Эйлера в 1741 г. в Берлин.

Мы расскажем о первой книге, которая носит название «О первых арифметических действиях в целых и ломаных числах».

Каким видится Эйлеру обучение математике

В предисловии Эйлер пишет: «Число арифметических книг, которыя в разных государствах на свет изданы, так велико, что многим сей труд мог бы весьма ненужен показаться». Однако перевод книг вызвал бы «превеликия затруднения», поскольку пришлось бы исправлять массу недостатков, «ибо содержат оне или одни только правила со многими при них положенными примерами, а основании, на котором те правила утверждаются, не упоминается в них ни одним словом; или хотя праведныя основания сея науки в некоторых руководствах и показываются, однакож так трудным и непонятным образом, что ежели кто к математическому порятку не привык, тому не можно почти того и выразуметь...». Он недоволен и тем, что авторы руководств не заботятся о том, чтобы проводить вычисления наиболее простым и удобным способом.

Эйлер считает, что арифметика не должна предлагаться без доказательств и обоснований, поскольку без них она неприменима во всех случаях и не оказывает должного влияния на развитие ума. Поэтому он решил изложить в «Руководстве» основания всех правил и арифметических действий, но сделать это настолько ясно, чтобы всякий желающий мог разобраться в существе дела.


РУКОВОДСТВО
КЪ
АРИѲМЕТИКѢ
ДЛЯ УПОТРЕБЛЕНІЯ
ГИМНАЗІИ
при
ИМПЕРАТОРСКОЙ
АКАДЕМІИ НАУКЪ
переведено съ Нѣмецкаго языка
чрезъ Василья Адодурова
Академіи Наукъ Адъюнкта.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ
1740

Эйлер полагает, что понимание правил будет способствовать тому, что учащиеся смогут решать не только стандартные задачи, но будут в состоянии разобраться и в необычной ситуации. Он замечает, что сознательное обучение арифметике займет не больше времени, чем если втолковывать правила без объяснения: «Всяк понимает то скоряе и гораздо лехче в памяти содержит, чего основание и начало ясно усматривает, и притом может оное при всех случаях лучше употребить в свою пользу». Обоснования правил, по мнению Эйлера, важны еще и потому, что большую часть своего учебного времени гимназисты тратят на языки, которые предполагают заучивание большого количества материала. Размышление же остается в стороне. Этот изъян гимназического образования и призвана ликвидировать арифметика.

Десятичная нумерация

Глава I («О арифметике вообще») носит в первой своей части методологический характер. Эйлер определяет арифметику как науку, которая «показывает свойство чисел, и притом подает некоторыя правила, способныя к исчислению или решению наибольших в общем житии случающихся задач». Поскольку арифметика является частью математики, то Эйлер считает необходимым сказать несколько слов о математике вообще. Главную черту этой науки он усматривает в том, что все математические задачи сводятся к нахождению «незнаемых» количеств с помощью «знаемых». Стало быть, арифметика, которая имеет дело с числами, показывает, как с помощью арифметических действий по данным числам находить неизвестные. По Эйлеру, арифметика состоит из двух частей: первая посвящена записи чисел и действиям над числами, вторая — установлению на основе свойств действий правил для нахождения неизвестных.

Эйлер определяет число как «многия части одного рода», находящиеся вместе, и переходит к объяснению десятичной нумерации. Он показывает, что можно пользоваться и другими системами нумерации — римской или изображать числа с помощью палочек, но такие способы счисления неудобны. Эйлер подробно останавливается на принципе поместного значения цифр; дает названия классов; показывает, как читаются числа, записанные в десятичной системе счисления.

Подводя итог сказанному, Эйлер определяет счисление как способ выговаривать и записывать числа и говорит, что счисление «почитается обыкновенно за первое арифметическое действие». Однако с этим он не согласен, для Эйлера арифметическое действие — это «особливой способ, как из двух или многих данных чисел производить новое».

Сложение и вычитание целых чисел

В главе II «О сложении, которое есть первое арифметическое действие» Эйлер не дает определения операции сложения, но поясняет ее смысл: «В сложении показываются такия правила, помощию которых можно найти некоторое число, двум или многим числам равное. Сие по оным правилам найденное число называется сумма данных чисел». Далее он подводит читателя к мысли о том, что узнать сумму двух чисел — это значит найти, из какого числа единиц, десятков, сотен и т.п. состоит эта сумма. Поэтому для начала необходимо научиться складывать единицы с единицами, сотни с сотнями и т.д. «И понеже 10 единиц сочиняют один десяток, 10 десятков одну сотню, 10 сотен одну тысячу, и так далее: то надобно в сложении, когда больше 9 единиц, десятков, сотен и пр. случится, оныя относить к числам большаго звания...» Так как сложение производится поразрядно, то все случаи сложения сводятся к умению прибавлять к числу единицы (от 1 до 9). Более того, все действия сводятся к действиям над однозначными числами. Эйлер приводит таблицы сложения для сумм от $1 + 1$ до $9 + 9$, после чего возвращается к правилу поразрядного сложения чисел. Разбирая сложение чисел 5326 и 4937, он не дает алгоритма нахождения суммы (например, в столбик), а проводит все вычисления словесно. Наконец, после рассмотрения нескольких примеров, формулируется правило, согласно которому числа нужно писать друг под другом, а затем отделять чертой. Эйлер разбирает два примера, используя запись столбиком. Все примеры расписаны и словесно.

Следующая задача, помещенная в конце главы, является типично эйлеровской. «А. Геллий упоминает, что стихотворец Гомер жил за 160 лет прежде создания города Рима; Рим построен до рождества Христова за 752 года; а от рождества Христова до сего времени прошло 1739 лет: Вопрошается, за сколько лет перед сим жил стихотворец Гомер?

Отвечай: от Гомеровых лет до сего времени прошло 160 лет, да 752 года, да еще 1739 лет, которыя три числа вместе сложенныя производят требуемое число лет...» Далее Эйлер вычисляет в столбик сумму и пишет: «Сумма: 2651 год; за столько лет перед сим жил стихотворец Гомер».

Главу III «О вычитании, которое есть второе арифметическое действие» Эйлер строит аналогично предыдущей. Сначала он поясняет, в чем состоит смысл вычитания, и формулирует задачу нахождения десятичной записи разности. Прежде чем перейти к решению этой задачи, он говорит о связи между сложением и вычитанием и дает (мимоходом) определение вычитания: «И так когда даны два числа, то показывает вычитание, как такое число находить, которое вместе с меньшим числом делает большее число». Вычитание предлагается осуществлять поразрядно, для чего потребуется уметь вычитать из двузначных чисел, не превосходящих 19, числа, не превосходящие 10.

Эйлер разбирает пример нахождения разности чисел 56 897 и 21 506; рассуждения он сначала проводит словесно, а затем дает запись в столбик. Нетрудно заметить, что в данном случае не происходит заема единицы из большего разряда. Это — более сложный вид вычитания, к объяснению которого Эйлер тут же и приступает. Следующие 16 страниц книги посвящены примерам с записью вычислений в столбик и параллельным словесным объяснением. Запись практически не отличается от современной, только точки, обозначающие заем, ставятся не над цифрами, а рядом. В конце главы обращается внимание на «великое оное сходство» между сложением и вычитанием, которое позволяет одним из этих действий проверять результат выполнения другого.

Умножение и деление целых чисел

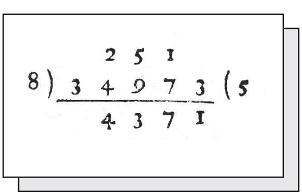
В начале главы IV «Об умножении, которое есть третье арифметическое действие» Эйлер говорит о том, что сложение и вычитание являются первичными арифметическими действиями, но есть и вторичные: «Такое свойство имеет и умножение, по тому что в оном показывается, как некоторой особливой род надлежащих до сложения вопросов гораздо способнее решить можно, нежели только через одно сложение». Автор дает определения множимого и множителя и обращает внимание на их равноправность (коммутативность умножения). Естественно, как и раньше, начинать изучение новой операции применительно к маленьким числам. Эйлер дает таблицу умножении замечает, что полезно знать ее на память.

В дальнейшем изложении широко используется распределительный закон умножения. Сначала Эйлер показывает, как нужно производить поразрядное умножение на однозначное число. После подробных объяснений формулируется правило, которое применяется к умножению 3596 на 7. Объяснение, как всегда, словесное и с записью столбиком. После нескольких примеров показывается, как произвести умножение на степень 10, а затем на любое число с нулями на конце. Затем Эйлер переходит к общему случаю умножения многозначных чисел; в результате разбора примеров появляется правило, которым мы пользуемся и по сей день. Эйлер рассматривает некоторые частные случаи: когда на конце многозначного числа нули и когда нуль находится в одном или нескольких разрядах множителя (тогда алгоритм упрощается).

В главе V «О делении, которое есть четвертое арифметическое действие» Эйлер дает два определения деления: 1) разделить — значит найти, сколько раз одно из данных чисел содержится в другом; 2) разделить — значит осуществить деление на столько равных частей, сколько содержит делитель. Как и умножению, делению предшествуют обстоятельные рассуждения, имеющие целью показать, в чем состоит смысл операции в первом и во втором случаях. В результате рассуждений Эйлер приходит к выводу, что «обе от нас на деление положенныя дефиниции между собою согласны». Он вводит понятия делимого, делителя и частного и замечает, что деление нацело может быть выполнено не всегда (в этом Эйлер видит сходство деления с вычитанием). Далее он пишет, что для успешного выполнения деления необходимо научиться делить числа, не превосходящие 81, на числа, не превосходящие 9, и приводит таблицу деления.

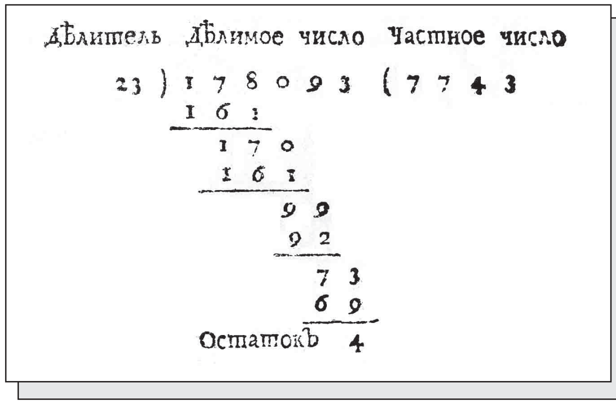
При делении на однозначный делитель используется прием поразрядного деления: «Как в умножении искомое произведение находится, когда все части множимаго числа умножаются множителем, а потом все оныя особливыя произведения складываются вместе: так и в делении искомое частное число находится, когда все части делимаго числа делятся на делителя, а потом все оныя особливыя частныя числа складываются». Прежде чем дать алгоритм, Эйлер приводит несколько примеров, которые снова разбираются словесно.

Деление 34 973 на 8 выглядит у Эйлера так:



Делитель записан слева от делимого, справа — остаток, снизу — частное. Цифры 2, 5 и 1 появляются в процессе деления. Итак, сначала делим 34 на 8, получаем 4 и 2 в остатке, 4 пишем снизу (первая цифра частного), 2 сверху. Теперь раздробляем 2 в единицы следующего разряда (получаем 20) и прибавляем 9, получаем 29. Это число снова делим на 8, будет 3 (вторая цифра частного) и 5 в остатке (пишем сверху). Продолжая так далее, получим частное и остаток.

Когда делитель есть двузначное число, то деление выполняется и записывается очень похоже на то, как мы это делаем теперь. «Яснее покажется сие от следующаго примера, в котором число 178 093 делится на 23».



При промежуточных вычислениях Эйлер рекомендует делать прикидку. Например, сразу видно, что $23 \cdot 8 = 184 > 178$, поэтому первая цифра частного будет 7. Удобно пользоваться прикидкой так. Допустим, требуется разделить 178 на 23. Делим сначала 178 на 20 (или 17 на 2), а потом 178 на 30 (или 17 на 3). В первом случае получим 8, во втором 5. «Но понеже прямой делитель 23 подходит ближе к первому делителю, то и прямое частное число должно быть ближе к 8 нежели к 5; которое и подлинно найдено 7».

Главу завершают 14 страниц примеров и подробных решений.

Ломаные числа, или дроби

В главе VI «О ломаных числах и о их свойствах вообще» Эйлер определяет дробь как частное от деления одного числа на другое, когда деление нацело невозможно. Он приводит в качестве примера деление 17 на 5 и показывает, что частное должно быть больше 3, но меньше 4. Далее вводится обозначение дроби и дается новое определение ломаного числа как собрания частей целого. Как обычно, знаменатель показывает, на сколько частей делили, числитель — сколько таких частей взяли. Эйлер обращает внимание на эквивалентность обоих определений.

Он формулирует и обосновывает правило сравнения дробей с единицей, то есть по сути рассматривает правильные и неправильные (по нынешней терминологии) дроби. Затем совершается естественный переход к выделению целой части из неправильной дроби; Эйлер дает правило и показывает обычный способ записи смешанного числа. Результат изъятия целого числа он называет «целое число с долями». Зачем же нужно уметь выделять целое число из ломаного числа? «И так получается чрез сие действие ясное понятие о ломаном числе потому что таким образом познавается, сколько оно содержит целых чисел, и какия еще при этом находятся в нем доли».

Эйлер формулирует основное свойство дроби, которое поясняет примерами, а затем делает попытку его обоснования: «Но явно есть, что сколько раз знаменатель ломаного числа содержится в числителе, столькож раз и двойной знаменатель в двойном числителе содержится...» После рассмотрения примеров Эйлер говорит о несократимых дробях, а затем показывает, как можно с помощью последовательного сокращения дроби привести ее к несократимой. Тут закономерно возникают признаки делимости. Эйлер формулирует признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 10, 3, 9, 6. По поводу признака делимости на 7 он замечает: «Но чтоб узнать, делится ли какое число на 7, или нет, на то лучшаго правила дать не можно, как только что то надобно отведывать через подлинное деление». Все признаки Эйлер обосновывает и показывает, как применять их к сокращению дробей.

Однако, пишет он, эти признаки не всегда позволяют сократить дробь. Для таких случаев требуется другой способ нахождения числа, на которое делятся и числитель, и знаменатель. Так появляется общий делитель, а затем и «большой общий делитель» (наибольший, как мы теперь говорим). Для нахождения последнего Эйлер предлагает пользоваться алгоритмом Евклида (словесное описание которого занимает целую страницу). После формулировки правила он дает определения чисел «неразделимых» (простых), «делимых» (составных), «равных» (четных), «неравных» (нечетных) и «между собою неразделимых» (взаимно простых). Сокращение дроби Эйлер называет «уменьшением», несократимые дроби — «неуменьшимыми». После разбора примера на применение алгоритма Евклида следует обоснование этого алгоритма.

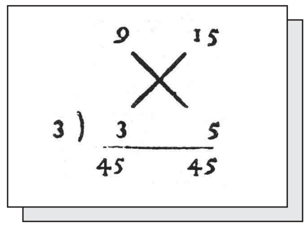
Необходимость «уменьшения» дробей Эйлер мотивирует так: «Чем меньше те числа, которыми ломаное число изображается, тем лучше и яснее можно себе силу и содержание ломанаго числа представить».

Четыре действия с ломаными числами

Глава VII «О сложении и вычитании ломаных чисел» открывается правилом, согласно которому найти сумму целого и дробного числа — это все равно что записать их рядом (целое перед дробью). Эйлер подчеркивает, что это правило следует из соглашений об изображении ломаных чисел и потому «никакого дальнаго доказательства не требует». Следующий шаг — сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

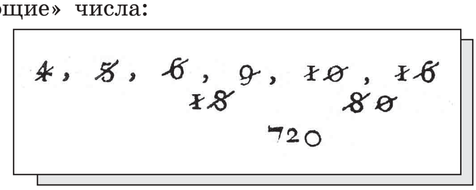
При вычитании смешанных чисел Эйлер показывает, как в случае необходимости от уменьшаемого брать единицу и раздроблять ее в соответствующие доли вычитаемого, чтобы вычитание было осуществимо.

Подводя итог сказанному, он замечает, что дроби с разными знаменателями просто так складывать и вычитать не получится: «Но присем должно прежде всего примечать то, что таких долей инако нельзя ни складывать, ни вычитать, ежели они к одинаким знаменателям приведены не будут, а когда то зделается, тогда уже никакой трудности больше не будет». Но для этого «потребно» некое «предуготовление». Оно, как нетрудно догадаться, есть небольшая глава арифметики о наименьшем общем кратном, которое Эйлер называет меньшим общим делимым. Его он предлагает искать как частное от деления произведения данных чисел на их наибольший общий делитель. Вот как выглядит в символике Эйлера нахождение наименьшего общего кратного чисел 9 и 15:



Под каждым из чисел записано частное от деления этого числа на наибольший общий делитель. Затем найдены произведения этих частных на исходные числа (крест-накрест), результаты (которые, конечно, совпали) подписаны под чертой. Эйлер пишет: «И хотя для сыскания сего числа довольно бы было как умножение так и деление делать только однажды: однакож не неполезно и то, когда оба оныя действия дважды производятся... двойное сие умножение служит вместо поверения, не учинено ли притом какой погрешности».

При нахождении наименьшего общего кратного Эйлер рекомендует по возможности упрощать вычисления. Так, при поиске меньшего общего делимого чисел 4, 5, 6, 9, 10 и 16 он ищет сначала таковые для чисел 4 и 16, 5 и 10, что позволяет сразу исключить числа 4 и 5 из рассмотрения. Затем ищется меньшее общее делимое чисел 6 и 9, и только потом рассматриваются числа 10 и 16. Процесс поиска кратных Эйлер записывает в несколько строк, зачеркивая «выбывающие» числа:



Теперь можно решить основную задачу главы — сформулировать правило сложения дробей с разными знаменателями (а также смешанных чисел).

Глава VIII «О умножении в долях» открывается правилом умножения ломаного числа на целое. Умножение дроби на дробь Эйлер сводит к первому случаю. Итак, чтобы умножить дробь на целое число, необходимо ее числитель умножить на целое число, а знаменатель оставить прежним. Согласно этому, умножить дробь на дробь, значит составить новую дробь, в числителе которой будет стоять произведение числителя исходной дроби на вторую дробь, а знаменатель останется прежним. Например, если говорить об умножении дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{7}$, то результатом, по Эйлеру, будет дробь $\dfrac{2\cdot\frac{4}{7}}{3}$, или, применяя первое правило, $\dfrac{\frac{8}{7}}{3}$, «но от того о сем произведении яснаго понятия получить еще не можно». Чтобы избавиться от такого «несвойственного ломаного числа», надо просто домножить числитель и знаменатель на одно и то же число. В данном случае это будет число 7:

$$\frac{\frac{8}{7}}{3}=\frac{\frac{8}{7}\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{8}{21}\ [1].$$

Отсюда видно, что произведение дробей можно найти, перемножив числители и взяв результат числителем, и знаменатели, взяв результат знаменателем. В целях удобства и скорости вычислений Эйлер рекомендует при умножении сразу производить сокращение дробей, если это возможно. Запись автора выглядит так:

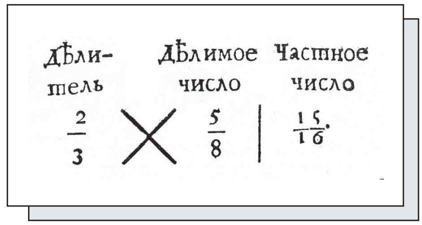
$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\ \text{умноженныя чрез}\ \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{20}}}\ \text{дают}\ \frac{1}{12}.$$

В связи с умножением дроби на дробь Эйлер обращает внимание на то, что при умножении на дробь результат может стать как больше первого множителя, так и меньше; это зависит от того, на какую дробь мы умножаем: большую единицы или меньшую.

Умножение смешанных чисел на дроби труда не представляет: можно либо перевести все числа в ломаные и затем умножить, либо применить распределительный закон. «Оба объявленные способы, как целыя числа с долями между собою умножать, в рассуждении своего основания между собою совершенно сходны: но в рассуждении порятка в умножении и их пользы находится между ними великая разность. Ибо часто употребляется первой способ умножения с великою пользою, а часто другой, так что ни одного другому предпочесть не можно, и для того надлежит в обоих равно обучаться».

Глава IX «О делении в долях» открывается правилом деления дробей, которые имеют одинаковые знаменатели. Этот случай легко обосновывается. Для деления в общем случае Эйлер предлагает привести дроби к общему знаменателю, «а потом деление делать вышепоказанным образом». Отсюда нетрудно перейти к обычному правилу деления дроби на дробь, что Эйлер и делает. Он останавливается на частных случаях: когда дробь делится на целое число и когда она делится на долю. Деление «сложенных» (смешанных) чисел осуществляется с помощью предварительного их перевода в ломаные.

Деление $\frac{2}{3}$ на $\frac{5}{8}$ в обозначениях Эйлера выглядит так:


Дѣли-тель
Дѣлимое число
Частное число
$\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \mid \frac{15}{16}$.

После того как формулируется правило деления с помощью умножения на обратную дробь, запись при делении $\frac{5}{8}$ на $\frac{3}{4}$ принимает вид:

$$\frac{3}{4}\quad \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{3}\ \text{———}\ \frac{5}{\underset{2}{\cancel{8}}}\ \Big|\ \frac{5}{6}$$

Выводы

Из проведенного обзора можно видеть, прежде всего, что изложение каждой главы пронизано одной идеей и целью — дать удобное правило для нахождения результата действия, о котором говорится в главе. Все главы строятся примерно по одной и той же схеме: начиная изложение общими определениями и примерами, Эйлер затем на их основе неторопливо выводит правила, причем сначала рассматривает частные случаи и только потом переходит к разработке общих положений.

Такое единообразное построение глав позволяет увидеть общий ход рассуждений, который остается неизменным, хотя рассматриваются различные арифметические действия. На самих алгоритмах, хотя они и важны в приложениях, дополнительного акцента не делается (кстати, Эйлер не призывает запоминать алгоритмы вычислений). Таким образом, наличие ряда руководящих идей, которым подчинено все изложение, делает арифметику не набором готовых рецептов для решения примеров и задач, а дедуктивной дисциплиной, разворачивающейся перед взором читателя сообразно со здравым смыслом. Обратим внимание на то, что здравый смысл играет большую роль во всем изложении Эйлера, заменяя собой дедукцию там, где она невозможна из методических соображений.

Все излагаемые положения Эйлер в обязательном порядке снабжает большим количеством примеров, которые разбирает либо до формулировки правила, либо после. При этом, как уже отмечалось выше, наряду с готовыми символическими рецептами он дает пространные словесные объяснения. Только проведя читателя через несколько страниц сплошного текста, Эйлер показывает удобный способ для быстрого производства вычислений. Но и после этого он парал-

[1] Эти выкладки Эйлер проделывает словесно.

лельно с записями в столбик дает словесное описание тех же действий.

Однако, несмотря на то, что в «Руководстве» рассматривается большое количество примеров, теория в этой книге стоит на первом месте. Сама установка автора на сознательность обучения уже предполагает повышенное внимание к теоретическим аспектам курса. Эйлер подробно рассказывает, откуда берутся те или иные алгоритмы, читатель фактически сам создает вместе с автором правила и способы производства вычислений. Эта традиция — уделять большое внимание вопросам теории при обучении арифметике — сохранялась долгое время и после Эйлера.

Эйлер в предисловии к «Руководству» настаивает на том, что учащиеся должны понимать, откуда берутся правила. При этом никакое новое понятие не появляется в курсе без соответствующей мотивировки. Так, в главе «О ломаных числах» Эйлер довольно долго изучает дроби, показывает, как их можно сокращать, и только после этого говорит о признаках делимости. Но признаки делимости не всегда годятся (о чем Эйлер снова прямо говорит), и тогда появляется понятие наибольшего общего делителя. Новые понятия и термины возникают у Эйлера именно в тот момент, когда в них появляется настоятельная необходимость, но никак не заранее со ссылками на то, что они пригодятся в будущем.

Интересно отметить два момента в построении курса арифметики у Эйлера. Во-первых, он не пользуется термином «кратное», употребляя вместо него термин «делимое», что вполне логично. Во-вторых, он обходит стороной основную теорему арифметики. Сейчас принято рассказывать об этой теореме в связи с поиском наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Эйлер ищет делитель с помощью алгоритма Евклида, а кратное — по формуле $m = \frac{ab}{d}$, где a и b — данные числа, а d — их наибольший общий делитель.

Эйлер при каждом удобном случае указывает читателю на приемы, позволяющие облегчить вычисления в тех или иных случаях. А в предисловии критикует авторов руководств, которые не обращают должного внимания на вычислительную сторону дела. Интерес Эйлера к вычислениям понятен: ведь сам он был активно работающим математиком и не понаслышке знал, как важно уметь быстро вычислять.

Учебник арифметики Эйлера оказал сильное влияние на многие последующие руководства, следы «эйлеровской арифметики» можно найти в учебниках для 5–6-х классов и по сей день, чему можно только порадоваться.

Литература

1. *Полякова Т.С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. — М.: КомКнига, 2007.

2. *Прудников В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. — М.: Учпедгиз, 1956.

3. Руководство к арифметике для употребления гимназии при Императорской Академии наук, переведено с немецкого языка чрез Василья Адодурова, Академии наук адъюнкта. — Спб.: 1740.

4. *Хармац А.Г.* Создание Л. Эйлером учебника арифметики нового типа с повышенной в нем ролью теории//Ученые записки МОПИ. 1968. Т. 202. Вып. 6.

Окончание. Начало на с. 24

РУМОВСКИЙ, Степан Яковлевич, астроном, математик, вице-президент Академии наук. Родился в 1734 г. близ г. Владимира. Учился в Александро-Невской семинарии, затем академической гимназии. Румовский становится студентом недавно созданного академического университета. «В математике юноша Румовский обладает такими прирожденными способностями, которые намного превосходят обычный уровень», — отзывался о нем профессор Рихман. В 1753 г. студент Румовский за выдающиеся успехи был рекомендован к выдвижению к адъюнкты. Его сочинение «Решение задачи Кеплера» было послано в Берлин на отзыв Эйлеру. Эйлер отметил на полях несколько мелких неточностей и написал блистательный отзыв. Вскоре девятнадцатилетнего адъюнкта послали для продолжения образования к Эйлеру, в доме которого он прожил 2 года — и навсегда сохранил к своему учителю самые добрые чувства. Через несколько лет после возвращения в Петербург Румовский становится профессором, а в 1800 г. — вице-президентом Академии. Выдающиеся труды по астрономии послужили поводом для избрания его членом Стокгольмской академии наук.

Румовский играл также немалую роль в деле народного просвещения — был попечителем Казанского учебного округа, способствовал становлению Лобачевского как ученого. Умер в 1812 г.

ФУСС, Никлаус («Николай Иванович»), математик и педагог. Родился в 1755 г. в Базеле. Д. Бернулли, учеником которого он был, рекомендовал его Эйлеру в качестве секретаря. Приехав в 1773 г. в Петербург, Фусс 10 лет работал с Эйлером по 8–9 часов в день — читал его корреспонденцию, писал под его диктовку, готовил к печати его труды. В 1783 г. стал профессором и академиком, а с 1800 г., после смерти Иоганна Альбрехта Эйлера, занял пост непременного секретаря Академии. Был женат на внучке Эйлера. Математические труды Фусса представляют собой главным образом продолжение и детализацию работ Эйлера. Составил первую биографию Эйлера и подготовил к печати многие его работы. Составил первые русские учебники математики, совместно с С.Я. Румовским разрабатывал программы для учебных заведений России. Умер в 1826 г.

По материалам книги: *Яковлев А.Я.* Леонард Эйлер. — М.: Просвещение, 1983

Леонард Эйлер

Эйлер

Леонард Эйлер (1707–1783) родился в Базеле, в Швейцарии. Его отец, Пауль Эйлер, был сельским пастором. Первые уроки Леонард получил от отца, а учась в последних классах гимназии, он посещал лекции по математике в Базельском университете, которые читал Иоганн Бернулли. Вскоре Эйлер самостоятельно изучает первоисточники, а по субботам Бернулли беседует с талантливым студентом — обсуждает неясные места. Леонард дружит с его сыновьями, особенно с Даниилом.

В 1723 г. Эйлер получил степень магистра искусств. В 1727 г. он предпринял попытку занять кафедру физики в родном университете, но ему это не удалось. Отказ способствовал принятию решения ехать в Петербург, куда его звали уже работавшие там Даниил и Николай Бернулли.

Именно в Петербурге Эйлер сложился как великий ученый. Критически переосмыслив работы Ферма по теории чисел и труды Лейбница и Ньютона по математическому анализу и механике, он нашел свой собственный путь в науке. Почти все его книги и статьи были опубликованы позднее, но главное в научной судьбе Эйлера решилось в его первое петербургское десятилетие.

К 35 годам из-за постоянных перегрузок Эйлер успел основательно подорвать свое здоровье. Достаточно сказать, что он во время долгих вычислений перенапряг зрение и ослеп на один глаз. Правда, сам Эйлер отнесся к этому событию философски: «Теперь я меньше буду отвлекаться от занятий математикой». В 1740 г. он оказался в тяжелой депрессии, что было связано не только со здоровьем, но и с постоянным напряжением из-за неустойчивости политической жизни в России. К тому времени появляется возможность переехать в Берлин, куда его приглашает король Фридрих II, и Эйлер подает заявление об отставке.

В берлинский период Эйлер написал множество работ. Это были не только труды по математике, но и по физике и астрономии: «Введение в анализ бесконечных» (1748), «Морская наука» (1749), «Теория движения Луны» (1753) и др. Эйлер также подготовил к изданию трехтомное «Интегральное исчисление». Ученый проявил себя и как популяризатор науки: им были написаны знаменитые «Письма к немецкой принцессе», в которых в популярной форме Эйлер изложил всю современную ему физику.

Со временем ситуация в России изменилась, на трон взошла Екатерина II, которой очень хотелось вернуть великого ученого. После переговоров Эйлер в 1766 г. возвращается в Россию.

Вскоре после приезда ученый полностью лишается зрения, но не прекращает работать. Приглашенный императрицей окулист удалил катаракту на одном глазу, но предупредил, что перегрузка неминуемо приведет к возвращению слепоты. Но разве мог Эйлер «не вычислять»? Уже через несколько дней после операции он снял повязку. И вскоре потерял зрение снова. На этот раз — окончательно. Впрочем, Эйлер мог вполне разборчиво писать на черной доске мелом. Несмотря на потерю зрения, работоспособность Эйлера не снизилась, даже наоборот: во второй петербургский период им написана половина всех его трудов. Умер Эйлер в 1783 г., оставив огромное научное наследие, которое до сих пор издается в Швейцарии.

У Эйлера было пятеро детей: три сына и две дочери. После смерти Эйлера все его потомки остались в России.

Именем Эйлера

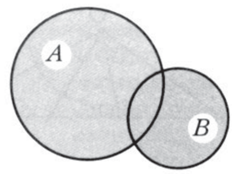
Эйлер внес огромный вклад в развитие математики. Его именем названо большое количество математических объектов: постоянная Эйлера, уравнения Эйлера, числа Эйлера, подстановки Эйлера, метод ломаных Эйлера, эйлеровы интегралы и многое другое.

Эйлерова характеристика

Для выпуклых многогранников имеет место соотношение: В + Г − Р = 2, где В — количество вершин, Г — количество граней, Р — ребер многогранника. Эйлер пришел к этому соотношению, рассматривая разные многогранники. Однако для невыпуклых многогранников эта формула не верна, число В + Г − Р может быть равно 0 или даже быть отрицательным. Это зависит от количества «дыр» в многограннике: например, для куба, в котором проделана сквозная дыра в форме параллелепипеда, В + Г − Р = 0. Число В + Г − Р называется эйлеровой характеристикой многогранника.

Круги Эйлера

При решении задач иногда удобно пользоваться кругами Эйлера. С помощью этих кругов можно изображать множества и операции над ними: пересечение, объединение и т.д. Например, пусть A — множество учеников класса, которые изучают английский язык, B — множество учеников, которые изучают французский язык. Тогда $A \cap B$ будет множество тех учеников, которые изучают оба языка.



Формула Эйлера

Между показательной и тригонометрическими функциями Эйлер обнаружил удивительную связь:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Здесь i — мнимая единица, $i^2 = -1$ (в школе говорят, что из отрицательных чисел нельзя извлекать корни, — это не совсем правда).

Если в формуле Эйлера положить $x = \pi$, то получим $e^{i\pi} = -1$. Это соотношение связывает воедино геометрию (число π), алгебру (число i) и анализ (число e).

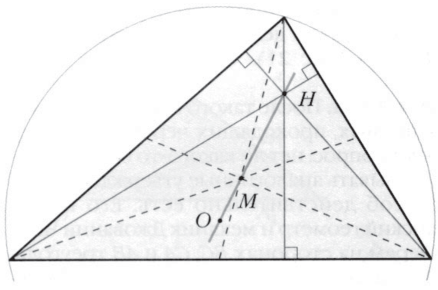
Функция Эйлера

В теории чисел Эйлер ввел функцию $\varphi(m)$ — число натуральных чисел, взаимно простых с m и меньших m. Например, $\varphi(10) = 3$, поскольку существует 3 числа, которые меньше 10 и взаимно просты с 10: это 3, 7 и 9. Эйлер доказал следующую теорему.

Теорема.

Если a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} - 1$ делится на m.

Прямая Эйлера



Три замечательные точки треугольника — точка пересечения медиан M, точка пересечения высот H и центр описанной окружности O — всегда лежат на одной прямой. Эта прямая называется прямой Эйлера.

Г. ШАРЫГИН,
Москва

О некоторыхъ результатахъ Эйлера в элементарной геометрiи

Среди огромного числа работ Леонарда Эйлера есть работы, посвященные практически всем разделам математики и физики его времени — математическому анализу и механике, теории чисел и гидродинамике, астрономии и акустике. Есть среди них и работы, посвященные геометрии. Они составляют сравнительно небольшую часть наследия великого ученого — примерно 70 работ из почти девятисот. И лишь немногие из этих геометрических работ можно назвать элементарными: в большинстве случаев Эйлер интересуется не классическими геометрическими вопросами, а задачами, происходящими из других наук. Например, он исследует свойства кривых, задаваемых различными алгебраическими уравнениями или являющимися траекториями движения физических тел, исследует различные методы построения географических карт или ищет треугольники, чьи углы, медианы и другие элементы находятся в рациональных отношениях. Для решения всех этих задач требуется хорошее владение математическим анализом и умение производить сложные алгебраические преобразования — искусство, в котором Эйлер достиг невиданных высот. Все это делает большинство его геометрических работ недоступными для неподготовленного читателя — школьника или даже учителя.

Однако даже того небольшого числа элементарно-геометрических результатов, которые можно найти в работах Эйлера, достаточно, чтобы считать его одним из самых выдающихся геометров своего времени. Оставив в стороне его топологические достижения: формулу, связывающую число граней, ребер и вершин многогранника и задачу о Кенигсбергских мостах (результаты, которые на 100 с лишним лет опередили свое время), можно сказать, что и в элементарной геометрии Эйлер оставил огромный след. Его теоремы и формулы можно найти в школьных учебниках и многочисленных задачниках по элементарной геометрии. Часть из них только приписывается великому математику — во всяком случае, в явной форме найти их в его работах очень трудно. Часть сформулированы в форме, далекой от ныне общепринятой. В этой заметке я попробую привести несколько примеров таких результатов Эйлера, причем, по возможности, как в формулировке и с доказательством самого Эйлера, так и в современной формулировке.

Формула Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника

Эта формула появилась в работе Эйлера *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum* (то есть «Простое решение некоторых сложных геометрических задач»), опубликованной в журнале *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, в 11 номере за 1767 год. В современной формулировке результат звучит следующим образом.

Теорема 1. В любом треугольнике расстояние d между центрами описанной и вписанной окружностей удовлетворяет соотношению

$$d^2 = R^2 - 2R\rho,$$

где R — радиус описанной, а ρ — радиус вписанной окружности данного треугольника.

Впрочем, в точности такой формулы вы в указанной работе не найдете. Вместо этого Эйлер в ней занимается тем, что выражает расстояния между центрами описанной и вписанной окружностей через стороны этого треугольника.

Точнее говоря, задача, которую Эйлер решает в этой статье, следующая: предположим, что мы знаем положение четырех замечательных точек треугольника — ортоцентра (точки пересечения высот) E, центра тяжести (точки пересечения медиан) F и центров вписанной и описанной окружностей G и H. Всегда ли по этим данным можно восстановить сам треугольник? И если да, то как это сделать? Эйлер приступает к решению с присущей ему тщательностью и скрупулезностью. Прежде всего он выражает все взаимные расстояния между данными четырьмя точками через стороны треугольника. Вот как он рассуждает в интересующем нас случае.

Для начала он обозначает стороны треугольника:

$$AB = c,\ AC = b,\ BC = a.$$

Далее площадь треугольника он обозначает буквой А; тогда справедливо равенство[1]

$$\mathrm{A}^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

[1] На самом деле Эйлер записывает вторые степени переменных не в привычном нам виде, а повторяя переменную. Например, вторая из нижеприведенных формул у него выглядит так:

$$AA = \frac{1}{16}(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4).$$

или

$$A^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

Тогда (рис. 1) пусть $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ — биссектрисы углов треугольника, G — точка их пересечения — центр вписанной окружности. Опустим из G перпендикуляр GR на AB. Так как площадь треугольника можно вычислить по формуле

$$\frac{1}{2}\rho(a+b+c) = \frac{1}{2}GR(a+b+c),$$

мы получаем равенство $GR = \frac{2A}{a+b+c}$. Далее, если $AR = x$, то расстояние от C до точки касания вписанной окружности со стороной AC равно $b - x$ (ведь расстояния от A до этой точки и до точки R равны).

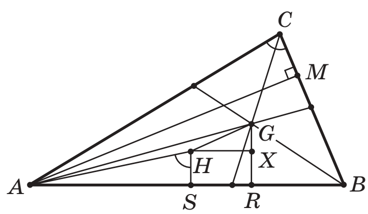


Рис. 1

С другой стороны, $BR = c - x$, и аналогичным образом получаем, что расстояние от C до точки касания вписанной окружности со стороной BC равно $a - c + x$. Приравнивая расстояния от C до точек касания со сторонами AC и BC, получаем: $x = \frac{c+b-a}{2}$. То есть

$$AR = \frac{c+b-a}{2} \text{ и } RG = \frac{2A}{a+b+c}.$$

Пусть теперь S — середина AB, H — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника — центр его описанной окружности. Проведем перпендикуляр AM из точки A к стороне BC треугольника. Тогда $AM = \frac{2A}{a}$ (как высота треугольника) и $CM = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ (по теореме косинусов). Проведем отрезок AH. Так как угол AHS равен углу ACM, то треугольники AHS и ACM подобны. Отсюда получаем:

$$AM : CM = AS : HS,$$

следовательно,

$$HS = \frac{CM}{AM}\cdot AS = \frac{c\left(a^2+b^2-c^2\right)}{8A}.$$

Итак,

$$AS = \frac{1}{2}c \text{ и } SH = \frac{c\left(a^2+b^2-c^2\right)}{8A}.$$

Задача Эйлера на латинском языке: *Datis positione bis quatuor punctis in quolibet triangulo ossignabilibos 1°. Intersectione perpendicularium ex singulis angulis in latera opposita ductorum* E, 2°. *Centro gravitatis* F, 3°. *Centro circuli inscripti* G, 4°. *Centro circuli circumscripti* H, *construere triangulum.*

Теперь по теореме Пифагора для треугольника GHX можно найти длину отрезка GH:

$$GH^2 = HX^2 + GX^2 = (AR - AS)^2 + (RG - SH)^2.$$

Надо только подставить полученные величины в формулу и раскрыть скобки. Однако сделать это не просто. Мы предлагаем читателю, сомневающемуся в этом, проделать на досуге это вычисление.

Находим разности:

$$AR - RS = \frac{c+b-a}{2} - \frac{1}{2}c = \frac{b-a}{2},$$

$$RG - SH = \frac{2A}{a+b+c} - \frac{c\left(a^2+b^2-c^2\right)}{8A} =$$

$$= \frac{(a+b)c^3 + \left(a^2+b^2\right)c^2 - (a+b)\left(a^2+b^2\right)c - \left(a^2-b^2\right)^2}{8(a+b+c)A}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для GH, получаем после сокращений:

$$GH^2 = \frac{abc}{16(a+b+c)A^2} \times$$

$$\times(a^4 + a^2bc - 2a^2b^2 + b^4 + ab^2c - 2a^2c^2 + c^4 + abc^2 - 2b^2c^2).$$

Чтобы сократить запись, Эйлер вводит три новые переменные:

$$a + b + c = p, \quad ab + ac + bc = q, \quad abc = r.$$

Тогда, например, площадь треугольника можно выразить через p, q и r следующим образом:

$$A^2 = \frac{1}{16}p(-p^2 + 4pq - 8r).$$

В итоге он получает формулу

$$GH^2 = \frac{r}{16pA^2}(p^4 - 4p^2q + 9pr) = \frac{r\left(p^3 - 4pq + 9r\right)}{16A^2}.$$

Или, учитывая выражение для площади,

$$GH^2 = \frac{r^2}{16A^2} - \frac{r}{p}.$$

Чтобы наконец получить из этого выражения современную формулу, надо вспомнить, как связаны площадь треугольника и радиусы вписанной и описанной окружности:

$$A = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}\rho(a+b+c).$$

Тогда

$$\frac{r^2}{16A^2} = R^2, \quad \frac{r}{p} = \frac{abc}{a+b+c} = 2R\rho.$$

Итак, доказательство теоремы завершено. Наверное, многим оно понравилось своей элементарностью в том, что касается идей. В самом деле, ведь практически единственные геометрические приемы, которые мы здесь использовали — теорема Пифагора и теорема косинусов. Но, несомненно, по тем же причинам многие сочтут его слишком техническим или даже скучным. Приведем для сравнения более современное доказательство, которое можно найти, например, в учебнике «Геометрия, 7–9» И.Ф. Шарыгина.

Для доказательства нам потребуется следующее вспомогательное утверждение, называемое иногда леммой Мансиона.

Утверждение 1. Продолжим биссектрису AA' треугольника ABC до пересечения с описанной окружностью этого треугольника. Обозначим точку пересечения буквой D. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда выполняется равенство

$$DB = DC = DI.$$

Доказательство. Прежде всего, $BD = DC$ как хорды, лежащие в одной окружности против равных вписанных углов (рис. 2). С другой стороны, так как угол BID — внешний для треугольника ABI, то он равен сумме углов: $\angle BAI = \frac{1}{2}\angle A$ и $\angle ABI = \frac{1}{2}\angle B$.

Поскольку $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу), то

$$\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B.$$

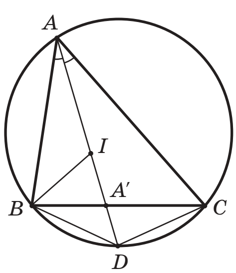


Рис. 2

То есть угол BID равен углу IBD, следовательно, треугольник BID — равнобедренный, $BD = ID$.

Кроме того, нам потребуется теорема синусов $\left(\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\right)$ и еще одно стандартное утверждение школьной геометрии.

Утверждение 2. Пусть точка M лежит внутри окружности радиуса R с центром O, причем $OM = d$. Если AB — произвольная хорда этой окружности, проходящая через M, то $AM \cdot MB = R^2 - d^2$.

Доказательство. Проведем через M вторую хорду CD (рис. 3). Соединим точки A и C, B и D, как показано на рисунке. Тогда в силу равенства вертикальных углов AMC и BMD, а также углов ABD и ACD (как опирающихся на одну дугу), получаем, что треугольники ACM и DBM подобны, откуда имеем:

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}, \text{ или } AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Если хорда CD является диаметром, то $CM = R - d$, $MD = R + d$ (или наоборот), откуда получается требуемое равенство.

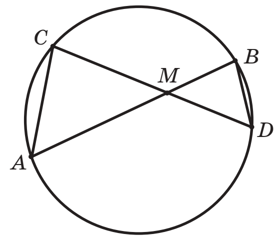


Рис. 3

Доказательство формулы Эйлера получается следующим образом. Применим теорему синусов к треугольнику ADB (рис. 4), получим: $BD = 2R\sin\frac{\angle A}{2}$. Теперь опустим перпендикуляр IP из I на AB. Тогда из прямоугольного треугольника AIP получим: $AI = \frac{\rho}{\sin\frac{\angle A}{2}}$. В итоге

$$R^2 - d^2 = AI \cdot ID = AI \cdot BD =$$

$$= \frac{\rho}{\sin\frac{\angle A}{2}} \cdot 2R\sin\frac{\angle A}{2} = 2R\rho,$$

откуда получается утверждение теоремы.

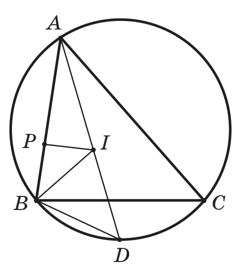


Рис. 4

Теорема Эйлера о прямой

В той же статье 1767 года можно найти еще один знаменитый результат — теорему о прямой Эйлера.

Теорема 2. В любом треугольнике центр описанной окружности H, ортоцентр E и точка пересечения медиан F лежат на одной прямой, причем точка F всегда лежит на отрезке EH так, что $EF : FH = 2 : 1$.

В отличие от предыдущего результата Эйлер формулирует это утверждение в явном виде, хотя и не удостаивает его звания теоремы. Как и прежде, его доказательство — чисто вычислительное. Например, чтобы найти расстояние между центром описанной окружности H и центром тяжести F, он рассуждает следующим образом (мы используем обозначения, введенные в предыдущем разделе).

Проведем медианы Aa, Bb и Cc треугольника ABC (рис. 5). Из точки F их пересечения опустим перпендикуляр FQ на сторону AB треугольника. Проведем высоту CP из вершины C. В силу теоремы о медианах

$$FQ = \frac{1}{3}CP = \frac{2A}{3c}.$$

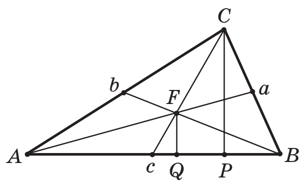


Рис. 5

Кроме того, из этих же соображений $cQ = \dfrac{1}{3}cP$. Но (теорема косинусов) $AP = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$, откуда $cP = AP - Ac$, а так как $Ac = \dfrac{1}{2}c$, получим: $cP = \dfrac{b^2-a^2}{2c}$. Учитывая все сказанное, в итоге получаем:

$$AQ = \frac{3c^2+b^2-a^2}{6c} \text{ и } QF = \frac{2A}{3c}.$$

Теперь по теореме Пифагора

$$FH^2 = (AQ - AS)^2 + (QF - SH)^2,$$

или, после преобразований (переменные p, q и r были введены выше),

$$FH^2 = \frac{r^2}{16A^2} - \frac{1}{9}(p^2 - 2q).$$

Аналогичным образом Эйлер находит квадраты расстояний между ортоцентром и точкой пересечения медиан, ортоцентром и центром описанной окружности:

$$EF^2 = \frac{r^2}{4A^2} - \frac{4}{9}(p^2 - 2q),$$

$$EH^2 = \frac{9r^2}{16A^2} - p^2 + 2q.$$

Отсюда сразу видно, что $EH = \dfrac{3}{2}EF$ и $FH = \dfrac{1}{2}EF$. В частности, $EH = EF + FH$, следовательно, все три точки лежат на одной прямой.

Доказательство закончено. Как и предыдущее, оно было очень простым в том, что касается идей, но, несомненно, потребовало от автора огромного вычислительного мастерства. В этом смысле современное доказательство (тоже взятое из учебника Шарыгина),

> Теорема Эйлера на латинском языке: *...evidens est, esse* $EH = \frac{3}{2}EF$ *et* $FH = \frac{1}{2}EF$*, sicque punctum H per puncta E, F sponte determinatur, scilicet... punctum H... in recta EF producta erit situm ut sit* $FH = \frac{1}{2}EF$ *ideoque* $EH = \frac{3}{2}EF$.

которое мы приведем сейчас, намного изящнее и технически проще.

Для начала напомним, что *гомотетией* с центром O и коэффициентом k (где k — произвольное вещественное число) называется преобразование плоскости, переводящее любую точку A в точку A', лежащую на прямой OA, так, что $\dfrac{OA'}{OA} = |\,k\,|$. Если $k > 0$, точка A' лежит на луче OA, если $k < 0$, то на дополнительном к нему луче. У гомотетии много важных свойств, которые делают ее очень полезной при решении геометрических задач. Нам потребуется следующее простое ***утверждение***: *при гомотетии угол переходит в угол, равный самому себе. В частности, перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные.*

Рассмотрим теперь гомотетию с коэффициентом $-\dfrac{1}{2}$ с центром в точке F — точке пересечения медиан треугольника ABC (рис. 6). Она переводит точки A, B и C (вершины треугольника ABC) в середины противоположных сторон a, b и c соответственно (мы опять пользуемся свойствами медиан). Таким образом, треугольник ABC переходит в треугольник abc. В силу указанного свойства гомотетии точка E пересечения высот треугольника ABC при этом должна перейти в точку пересечения высот abc. Но так как средняя линия ab параллельна стороне AB, то высота, проведенная в треугольнике abc из вершины c, будет перпендикулярна стороне AB треугольника ABC. Так как c — середина AB, эта высота будет являться серединным перпендикуляром к стороне AB исходного треугольника. Аналогично, высота, опущенная из b на ac, будет являться серединным перпендикуляром к AC. Следовательно, точка пересечения высот треугольника abc совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC. Теперь из определения гомотетии следует утверждение теоремы.

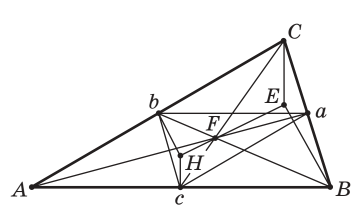


Рис. 6

Задача Ферма

Не следует, однако, думать, что все доказательства, которые находил Эйлер, были исключительно вычислительными. Вот, например, в статье *Variae demonstrationes geometriae* («Различные геометрические доказательства») в том же журнале *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, № 1 за 1750 год, Эйлер доказывает несложную геометрическую теорему, впервые сформулированную знаменитым французским математиком XVII века Пьером Ферма.

Вот эта теорема.

Теорема. На стороне AB прямоугольника $ABFE$ как на диаметре построена во внешнюю сторону полуокружность. Пусть M — произвольная точка на этой полуокружности. Проведем отрезки EM и FM. Пусть R и S — точки пересечения AB с EM и FM соответственно. Тогда если $AB : BF = \sqrt{2} : 1$, то $AS^2 + BR^2 = AB^2$.

Мы приведем здесь доказательство Эйлера с некоторыми сокращениями, приведя обозначения к виду, привычному современным школьникам. Итак, для начала Эйлер доказывает простую ***лемму***: если точки R и S лежат на отрезке AB (R — между A и S), то выполнено равенство

$$AB\cdot RS + AR\cdot BS = AS\cdot BR.$$

Эйлер приводит два доказательства этого равенства — алгебраическое и геометрическое (где вместо произведений отрезков использует площади прямоугольников). Чтобы не усложнять изложение, мы ограничимся алгебраическим доказательством. Итак,

$$AB\cdot RS + AR\cdot BS = (AS + BS)\cdot(BR - BS) + AR\cdot BS =$$
$$= AS\cdot BR - (AS - AR)\cdot BS + BS\cdot RS = AS\cdot BR.$$

Далее, для доказательства теоремы Эйлер проводит прямые MA и MB. Пусть P и Q — точки их пересечения с прямой EF (рис. 7). Обозначим угол PAE через α, а угол FBO через β. Тогда

$$\alpha + \angle MAB = \frac{\pi}{2} \text{ и } \beta + \angle MBA = \frac{\pi}{2}.$$

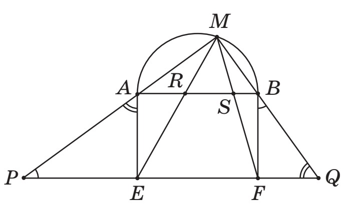


Рис. 7

Но так как AB — диаметр окружности, в которую вписан угол AMB, то $\angle MAB + \angle MBA = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Поскольку треугольники PAE и BQF прямоугольные, то из доказанного равенства углов следует, что $\beta = \angle APE$, $\alpha = \angle BQF$ и эти треугольники подобны. Запишем соотношения подобия:

$$PE : AE = BF : QF,\quad PE\cdot QF = AE\cdot BF = AE^2.$$

Но так как

$$EF = AB = \sqrt{2}\,AE,$$

мы получаем равенство $2PE\cdot QF = EF^2$. В силу подобия треугольников PMQ и AMB аналогичное равенство должно выполняться и для точек A, B, R и S, то есть $2AR\cdot SB = RS^2$. Учитывая это равенство и доказанную лемму, а также очевидное равенство $AS + BR = AB + RS$, получаем:

$$AS^2 + BR^2 = (AS + BR)^2 - 2AS\cdot BR =$$
$$= (AB + RS)^2 - 2(AB\cdot RS + AR\cdot BS) =$$
$$= AB^2 + RS^2 + 2AB\cdot RS - 2AB\cdot RS - RS^2 = AB^2.$$

Чтобы читатель мог оценить красоту этого доказательства, приведем одно из возможных вычислительных доказательств этого утверждения (рис. 8).

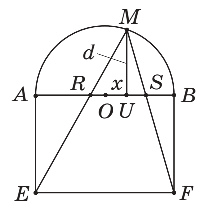


Рис. 8

Опустим перпендикуляр MU из точки M на AB. Пусть O — центр рассматриваемой полуокружности; $OU = x$, $MU = d$, $AE = a$, тогда $x^2 + d^2 = \frac{1}{2}a^2$ (мы учли, что $AB = \sqrt{2}\,AE$). С другой стороны, так как треугольники AER и UMR подобны,

$$MU : UR = EA : AR,$$

или

$$AR = \frac{UR}{MU}\cdot EA = a\frac{UR}{d} = a\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} + x - AR}{d},$$

откуда $AR = \dfrac{a^2\sqrt{2} + 2ax}{2a + 2d}$. Аналогично, из треугольников MUS и FBS, находим $BS = \dfrac{a^2\sqrt{2} - 2ax}{2a + 2d}$.

Тогда

$$AS = AB - BS = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{2} + 2d\sqrt{2} + 2x}{a + d},$$

$$BR = AB - AR = \frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{2} + 2d\sqrt{2} - 2x}{a + d}.$$

В итоге, учитывая соотношение на x, a и d, получаем:

$$AS^2 + BR^2 = \frac{a^2}{4(a + d)^2}(4a^2 + 16d^2 + 8x^2 + 16ad) =$$

$$= \frac{a^2}{4(a + d)^2}(8(a + d)^2) = 2a^2 = AB^2.$$

Работа выполнена в рамках гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации НШ-8004.2006.2

В. ВАВИЛОВ,
Москва

Капризная формула

Изготовление моделей многогранников из плотной цветной бумаги или других материалов — довольно старая традиция в школе им. А.Н. Колмогорова. Этому, как правило, посвящено специальное задание так называемого *математического практикума* (он проходит в течение всего периода обучения и посвящен «экспериментальной» математике). Конечно, при изучении темы «Многогранники» мы только изготовлением моделей не ограничиваемся. В частности, изучается знаменитая формула Эйлера и ее «окрестности», группы самосовмещений многогранников (также задание практикума) и другие вопросы. В этой статье мы остановимся на описании некоторых лекционных материалов прошедшего полугодия в одиннадцатых классах; некоторые из изготовленных моделей многогранников послужили и в качестве елочных игрушек, к которым учащиеся добавили еще и разнообразные фигурки в стиле «оригами». В конце статьи предложен ориентировочный план большой работы экспериментального характера, который может быть использован как на уроках, так и в рамках работы факультативных курсов и кружков для различных возрастных групп учащихся.

Любой выпуклый многоугольник имеет столько же сторон, сколько и вершин. Поэтому можно классифицировать такие многоугольники по числу сторон (или вершин): треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т.д. Попытка классификации многогранников привела в 1750 г. известнейшего математика Леонарда Эйлера к следующему результату.

Теорема 1. (*Л. Эйлер*). Для любого выпуклого многогранника

$$V - E + F = 2,$$

где V — число вершин, E — число ребер и F — число граней многогранника.

Его работа началась с того, что он составил довольно большую таблицу, в которую выписал значения величин V, E, F для конкретных многогранников (мы ограничимся здесь только таблицей для пяти правильных многогранников, из которой видно, что нужное соотношение выполнено). Острая наблюдательность позволила Л. Эйлеру в этом массиве чисел обнаружить отмеченную закономерность. В 1751 г. он дал доказательство этой формулы для выпуклых многогранников.

Название	***V***	***E***	***F***
Тетраэдр	4	6	4
Октаэдр	6	12	8
Куб (гексаэдр)	8	12	6
Икосаэдр	12	30	20
Додекаэдр	20	30	12

Долгое время считалось, что эта формула Эйлера справедлива для всех многогранников. О. Коши разделял эту точку зрения и в 1811 г. (ему было тогда 22 года) дал элегантное доказательство формулы Эйлера, которое, правда, годилось только для выпуклых многогранников и некоторого класса невыпуклых.

Идея Коши (немного модифицированная) была основана на следующих великолепных наблюдениях. Во-первых, представим себе, что данный выпуклый многогранник является полым и его поверхность выполнена из эластичной резины. Вырежем одну грань, отложим ее в сторону, а оставшуюся часть (больше не разрезая) растянем на плоскости. Грани и ребра, конечно, деформируются (например, ребра могут стать криволинейными). В полученной так называемой «карте» (сети) величины V, E не изменились. Для того, чтобы доказать формулу Эйлера для исходного многогранника нужно установить равенство $V - E + F = 1$ для этой плоской карты.

Замечание. Можно избавиться от криволинейных границ на карте. Для этого достаточно представить, что все грани, кроме одной, сделаны из картона, а одна — из прозрачного стекла. Если посмотреть внутрь многогранника через стекло так, чтобы была видна вся внутренность многогранника (а этого может не случиться, если многогранник не является выпуклым). То, что мы увидим, можно интерпретировать как плоскую карту, нарисованную на стекле и уже с прямолинейными границами (стереографическая проекция «картонной части»).

Второе соображение Коши состоит в том, что для доказательства нужной формулы в общем случае достаточно доказать ее только для таких карт, все грани (страны) которых являются криволинейными треугольниками. Это следует из того, что, выбрав по одной точке внутри каждой грани и соединив ее кривыми линиями с вершинами соответствующей грани, мы получим новую карту, состоящую только из криволинейных треугольников, для которой величина $V - E + F$ точно такая же, как и у исходной карты. В самом деле, если некоторая грань не треугольная и имеет f вершин, то, разбив ее указанным способом на криволинейные треугольники, мы к исходной карте добавим f новых ребер и f новых граней. От этого величина $V - E + F$ не изменится.

Последнее соображение таково. В новой карте, состоящей из криволинейных треугольников, к ее границе примыкают два вида треугольников. Треугольники первого вида имеют ровно одну сторону на границе карты, треугольники второго вида — две. Рассмотрим один из таких граничных треугольников и удалим из него те стороны, которые лежат на границе. Для первого вида треугольников мы удаляем из карты одно ребро и одну грань (оставляя его вершины и две стороны); у треугольников второго вида мы удаляем из карты одну вершину, две стороны и одну грань. При таких удалениях граничных треугольников величина $V - E + F$ не изменяется. Последовательно удаляем треугольники до тех пор, пока не останется ровно один треугольник. Для образуемой этим треугольником простейшей карты имеем:

$$V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1.$$

Это и завершает доказательство формулы Эйлера для выпуклых многогранников.

Первые реакции на доказательство Коши были восторженными и вселяли уверенность в то, что формула Эйлера верна для любого многогранника. Однако швейцарский математик Симон Люилье уже через год после работы Коши заметил, что многогранник, который получается из большого куба удалением маленького куба («*полый куб*»), нельзя растянуть на плоскость и при удалении любой внутренней или внешней его грани (рис. 1). Тем самым, уже первый шаг в доказательстве Коши не является верным.

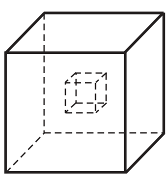


Рис. 1. «Полый куб»

Как отмечал Люилье, свое открытие он сделал, рассматривая минералогическую коллекцию своего друга, в которой заметил двойной кристалл, где внутренний кристалл был непрозрачным, а внешний пропускал свет (например, это мог быть кубик сернистого свинца внутри кристалла полевого шпата). Для «полого куба» имеем: $V = 16$, $E = 24$, $F = 12$ и $V - E + F = 4$! Другой пример Люилье представляет собой «*коронованный куб*», показанный на рисунке 2, для которого $V - E + F = 16 - 24 + 11 = 3$!

Наконец, им же предложен пример многогранника в виде картинной рамы, для которого $V - E + F = 0$ (рис. 3).

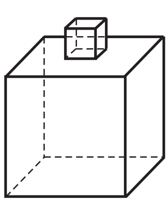


Рис. 2. «Коронованный куб»

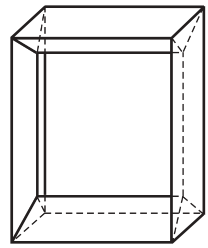


Рис. 3. «Картинная рама»

Немецким математиком Ф. Гесселем через двадцать лет после Люилье вновь были открыты примеры «полых» и «коронованных кубов» (и, что любопытно, также при осмотре коллекций минералов!) и даны новые примеры тетраэдров-близнецов, показанные на рисунке 4, которых Люилье не заметил. Как легко проверить, в обоих случаях $V - E + F = 3$.

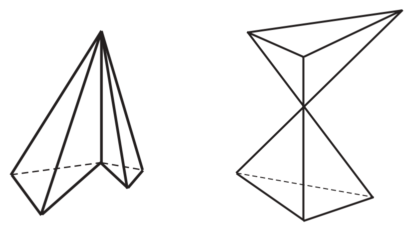


Рис. 4. Тетраэдры-близнецы

Итак, формула Эйлера справедлива далеко не для любых многогранников!

А для каких многогранников эта замечательная формула Эйлера верна? В чем секрет эйлеровости многогранника, то есть для каких многогранников M его (эйлерова) характеристика $\chi(M) = V - E + F$ равна 2?

Ответ стали искать, идя по следующему пути. Все более сложные многогранники можно получать из более простых, «приставляя» их друг к другу равными гранями (см., например, на рис. 5 и 6 пристраивание «крыши» к кубу или «отсечение» от него вершины). Мы ограничимся здесь случаем, когда второй приставляемый многогранник является тетраэдром — простейшим из всех многогранников. Выясним, что будет происходить с величиной $V - E + F$, если мы «приставим» к некоторой треугольной грани ABC многогранника M тетраэдр $ABCD$, у которого вершина D не совмещается ни с одной из вершин многогранника M (рис. 5).

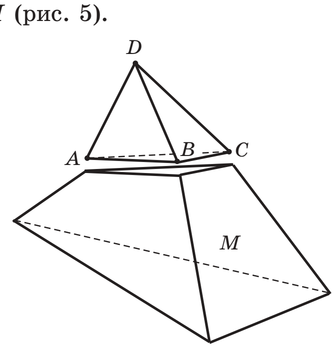


Рис. 5. Простое добавление тетраэдра

Число вершин многогранника M увеличится на единицу (добавляется D), число граней увеличится на 2 (добавляется три новых грани DAB, DBC, DAC и пропадает одна грань, совмещенная с ABC), число ребер увеличится на 3 (добавятся ребра AD, BD, CD). Следовательно, величина $V - E + F$ не изменится.

Таким образом, если для M формула Эйлера справедлива, то она будет выполняться и для полученного многогранника. Этот результат остается справедливым и тогда, когда какая-нибудь грань тетраэдра окажется в одной плоскости со смежной гранью многогранника (рис. 6). Тогда в полученном многограннике будет на одну грань меньше, чем у указанного выше, но зато пропадает и одно ребро, так что на значении величины $V - E + F$ это не отразится.

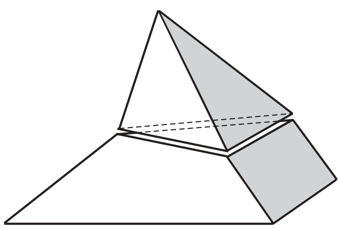


Рис. 6. Простое добавление тетраэдра

Подобным образом легко проверить, что изучаемая величина не изменяется, если прикладывать тетраэдр так, что не одна, а две или даже три его грани (рис. 7) совместятся с гранями многогранника. (Проверьте это, используя приведенные рисунки.)

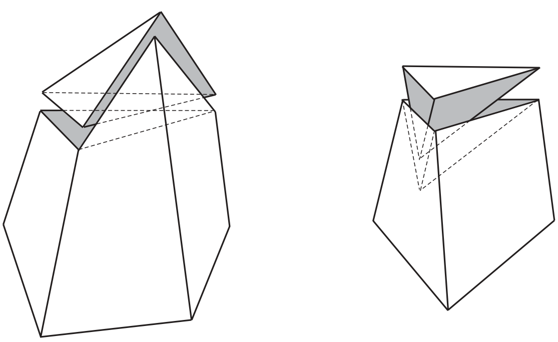


Рис. 7. Более сложное добавление тетраэдра

Эти рассуждения показывают, что формула Эйлера справедлива для достаточно широкого класса многогранников, по крайней мере она выполняется для выпуклых многогранников. Действительно, взяв внутри выпуклого многогранника M произвольную точку O и соединив ее со всеми вершинами многогранника, мы разобьем весь многогранник на пирамиды с общей вершиной O. Разобьем теперь каждую пирамиду на треугольные пирамиды (тетраэдры с той же вершиной O) — получим разбиение многогранника на тетраэдры. Выберем теперь какой-либо один из этих тетраэдров разбиения и будем последовательно приставлять к нему остальные, пока не получится исходный многогранник. Так как при каждом шаге величина $V - E + F$ не изменяется и так как для начального тетраэдра она равна 2, то и для многогранника M она будет равна 2.

Замечание. Примеры Люилье, в частности, запрещают достраивания «по вершине и ребру». При последовательном пристраивании тетраэдра одной гранью нужно также следить за тем, чтобы противоположная вершина тетраэдра не принадлежала уже построенному многограннику. Предоставляем читателю самостоятельно установить, что в случае *выпуклого многогранника M* можно в такой последовательности приставлять тетраэдры, чтобы это условие каждый раз выполнялось.

Любой простой многогранник можно разбить на тетраэдры (также, как любой простой многоугольник можно разбить на треугольники). Однако соотношение Эйлера $\chi(M) = V - E + F = 2$ выполняется, во-первых, не для всех простых многогранников («*картинная рама*» на рис. 3), а во-вторых, для непростого многогранника оно может выполняться («*эйлеров каприз*» на рис. 8), а может и не выполняться («морской еж» Кеплера на рис. 9).

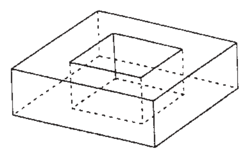


Рис. 8. «Эйлеров каприз»

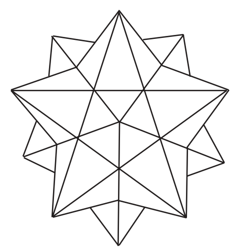


Рис. 9. «Морской еж»

Напомним, что простым многоугольником называется такой многоугольник, который ограничен одной несамопересекающейся замкнутой линией и для которого из каждой вершины выходит ровно две стороны. *Многогранник называется простым*, если:

1) все его грани являются простыми многоугольниками;

2) никакие две его несмежные грани не имеют общих точек (внутренних или граничных), за исключением, быть может, одной общей вершины;

3) две смежные грани имеют только одно общее ребро и не имеют других общих точек. Дело состоит в том (повторим еще раз!), что при конструировании многогранника из тетраэдров для неизменности величины $V - E + F$ необходимо, чтобы каждый раз, когда тетраэдр приставляется одной гранью, противоположная вершина не совпадала ни с одной из вер-

шин уже построенного многогранника. Однако имеются многогранники, для которых такого совпадения вершин избежать нельзя; одним из таких многогранников является «*картинная рама*», которая имеет одну сквозную дыру (рис. 10).

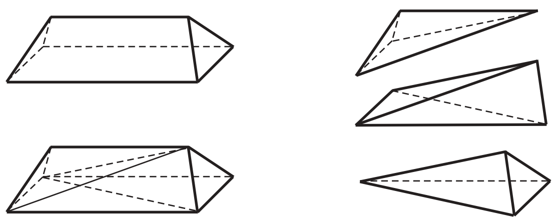


Рис. 10. Разбиение на тетраэдры

Наглядно становится ясным, что простой многогранник можно нужным нам образом составить из тетраэдров, когда он не имеет сквозных «дыр», то есть не имеет кольцеобразной формы «бублика». Такие простые многогранники без «дыр» называются многогранниками нулевого рода. Теорема Эйлера допускает тогда более общую форму.

Теорема 2. Для всякого простого многогранника нулевого рода

$$V - E + F = 2.$$

Всякий простой многогранник, не являющийся многогранником нулевого рода, имеет одну или несколько сквозных дыр. Число таких дыр называется *родом многогранника*. Многогранники рода 0 выше уже многократно встречались (например, выпуклые многогранники). «Картинная рама» на рисунке 3 и многогранник на рисунке 11 — это простые многогранники рода 1.

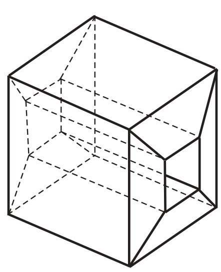


Рис. 11. Простой многогранник рода 1

Простой многогранник рода 1 можно получить из двух простых многогранников рода 0, приставляя друг к другу двумя несмежными гранями и ликвидируя эти грани у полученного нового многогранника (Как таким образом получить многогранник на рис. 11?) Простой многогранник рода 2 можно получить из двух многогранников рода 1, приставив их друг к другу таким же образом; например, используя два одинаковых многогранника, показанного на рисунке 11. Вообще, простой многогранник рода $p + 1$ можно получить из простого многогранника рода p, приставив к нему двумя несмежными гранями простой многогранник рода 0 (Как?). Если последовательно проследить за нашими примерами построения многогранников рода p и проанализировать изменение величины $V - E + F$, то мы получим подтверждение нового результата.

Теорема 3. Для всякого простого многогранника рода p справедливо соотношение

$$V - E + F = 2 - 2p.$$

Подчеркнем, что теоремы 2 и 3, конечно, нельзя считать доказанными нашими рассуждениями, так как не доказано, что любой многогранник рода p может быть получен указанным выше способом из некоторого многогранника рода $p - 1$. Можно доказать, что это действительно так, но в этой статье мы не будем на этом останавливаться.

Более того, при таком изложении, например, само соотношение $V - E + F = 2$ следовало бы считать определением простого многогранника нулевого рода, так как определения сквозных дыр и доказательства соотношения Эйлера для простых многогранников, не имеющих сквозных дыр, нами не приведено.

Лабораторная работа «Эксперименты с многогранниками»

Формула Эйлера является одной из великолепных математических жемчужин. Ее применения разнообразны в самых неожиданных областях и могут составить отдельную книгу в серии «Из жизни замечательных идей». Само открытие формулы покоилось на чистом эксперименте, затем уже были даны различные доказательства самой формулы и ее обобщений (Эйлер, Лежандр, Пуансо, Коши, Люилье, Гессель, Пуанкаре). Любопытно, что интерес к этой формуле разгорался с новой силой каждый раз, когда возникал пример многогранника, для которого формула Эйлера не верна. Более того, само определение многогранника выросло (в значительной мере) из желания описать эйлеровские многогранники.

При должной организации учебных занятий по теме «Многогранники» можно повторить практически весь тот трудный путь, который и привел к конечному результату — выяснению того, для каких же, кроме выпуклых, многогранников формула Эйлера имеет место. Это вполне целостное исследование, проведенное самими учащимися (конечно же, под руководством учителя), никого не оставит равнодушным и надолго запомнится. Его можно провести по следующему примерному плану (многие из пунктов плана годятся не только для старшеклассников):

1. Составить таблицу значений V, E, F для различных многогранников.
2. Проверить формулу Эйлера, пристраивая «крыши» и удаляя их.
3. Разобрать примеры Люилье.
4. Рассмотреть «эйлеров каприз» и найти другие «капризные» многогранники.
5. Рассмотреть пример «Морского ежа» Кеплера; сделать его картонную модель (см. [2]).
6. Рассмотреть большой звездчатый додекаэдр (см. [2]).

Окончание см. на с. 48

И. СМИРНОВА, В. СМИРНОВ,
Москва

Урокъ по темѣ «Теорема Эйлера»

Целью данных уроков является знакомство учащихся с одним из наиболее важных свойств выпуклых многогранников — теоремой Эйлера. Эта теорема связывает вместе число вершин, ребер и граней выпуклого многогранника. Она положила начало одному из наиболее интенсивно развивающихся в настоящее время направлений геометрии — топологии.

Проверка домашнего задания

Начинаем урок с проверки домашнего задания предыдущего урока, посвященного выпуклым многогранникам и их свойствам. Затем слушаем заранее подготовленное сообщение ученика на тему «Жизнь и творчество Л. Эйлера».

При подготовке этого сообщения можно воспользоваться следующей литературой:

1. *Гиндикин С.Г.* Леонард Эйлер//Квант, 1983, № 10, 11.
2. *Яковлев А.Я.* Леонард Эйлер. — М.: Просвещение, 1983.

Новый материал

Учащимся предлагается заполнить таблицу, поставив в нее числа, соответствующие количеству вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) указанных многогранников.

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n + 1$	$2n$	$n + 1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n + 2$

Вопрос. Какая зависимость имеется между числом вершин, ребер и граней этих многогранников?

Ответ. Для всех выбранных многогранников имеет место равенство В − Р + Г = 2.

Оказывается, что данное равенство справедливо не только для указанных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2, \qquad (*)$$

где В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней данного многогранника.

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой топологии — раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек. Такие свойства называются топологическими. Соотношение Эйлера В − Р + Г = 2 для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, однако их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются. При этом многогранник может стать невыпуклым, тем не менее для него будет выполняться соотношение Эйлера. Однако есть невыпуклые многогранники, для которых соотношение Эйлера не выполняется. Пример такого многогранника приведен на рисунке 1. Он получается, если в кубе вырезать дыру в форме параллелепипеда.

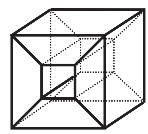


Рис. 1

Учащимся предлагается самостоятельно найти число вершин, ребер и граней этого многогранника.

В результате получаем:

$$\text{В} = 16,\ \text{Р} = 32,\ \text{Г} = 16,\ \text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 0.$$

Оказывается, что для выполнимости соотношения Эйлера существенным является не столько выпуклость многогранника, сколько то, что у него нет дыр. Поверхность выпуклого многогранника непрерывной деформацией можно сделать такой же, как у шара, а с поверхностью многогранника, изображенного на рисунке 1, этого сделать нельзя.

Доказательство (теоремы Эйлера). Представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости.

Это можно сделать, например, с помощью центрального проектирования с центром в точке S, расположенной немного выше удаленной грани $ABCDE$ (рис. 2).

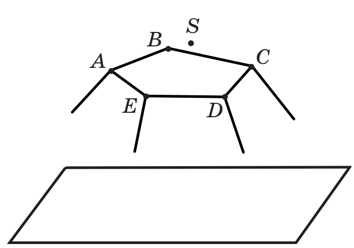


Рис. 2

В результате на плоскости получим сетку (рис. 3), состоящую из $Г' = Г - 1$ многоугольников (которые по-прежнему будем называть гранями), В вершин и Р ребер.

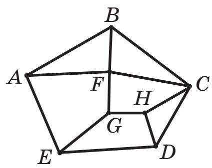


Рис. 3

Для этой сетки нужно доказать равенство

$$В - Р + Г' = 1. \qquad (**)$$

Тогда для многогранника будет справедливо требуемое равенство (*).

Докажем, что соотношение (**) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике сетки провести диагональ. Действительно, после проведения такой диагонали (например, EF) в сетке будет В вершин, Р + 1 ребер и Г′ + 1 граней, следовательно,

$$В - (Р + 1) + (Г' + 1) = В - Р + Г'.$$

Пользуясь этим свойством, проведем в сетке диагонали, разбивающие входящие в нее многоугольники на треугольники, и для полученной треугольной сетки (рис. 4) покажем выполнимость соотношения (**).

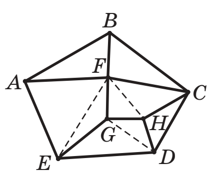


Рис. 4

Для этого будем последовательно убирать крайние треугольники. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника требуется снять одно ребро (на рис. 4 для удаления треугольника ABF требуется снять ребро AB);

б) для удаления треугольника требуется снять два ребра (на рис. 5 для удаления треугольника BCF требуется снять ребра BC и BF).

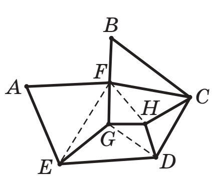


Рис. 5

В обоих случаях соотношение (**) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника сетка будет состоять из В вершин, Р − 1 ребер и Г′ − 1 граней, $В - (Р - 1) + (Г' - 1) = В - Р + Г'$.

Самостоятельно рассмотрите второй случай (рис. 6).

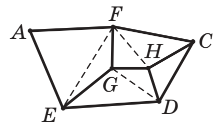


Рис. 6

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет соотношения (**). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придем к сетке, состоящей из одного треугольника. Для такой сетки В = 3, Р = 3, Г′ = 1, следовательно,

$$В - Р + Г' = 1.$$

Значит, соотношение (**) имеет место и для исходной сетки, откуда окончательно получаем, что для данного многогранника справедливо соотношение (*).

Решение задач

Задача 1. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет 12 ребер? Нарисуйте такой многогранник.

Решение. Пусть у данного многогранника будет В вершин, Р ребер и Г граней. Тогда 3Г = 2Р, где Р = 12, значит, Г = 8. Применяем теорему Эйлера, из которой следует, что В = 2 + Р − Г. В нашем случае В = 2 + 12 − 8 = 6. Итак, В = 6, Р = 12, Г = 8. Примером такого многогранника является октаэдр (рис. 7).

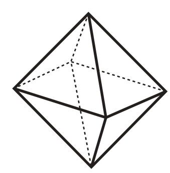


Рис. 7

Задача 2. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

Решение. 3В = 2Р, учитывая, что Р = 12, имеем: В = 8. По теореме Эйлера

$$Г = 2 - В + Р,\ Г = 2 - 8 + 12 = 6.$$

Таким образом, у данного выпуклого многогранника В = 8, Р = 12 и Г = 6. Примером такого многогранника является куб.

Задача 3*. Докажите, что в любом выпуклом многограннике число треугольных граней плюс число трехгранных углов больше или равно восьми.

Решение. Обозначим через $Г_n$ число граней с n ребрами. Тогда $Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + Г_6 + \ldots$ Каждая треугольная грань имеет три ребра, и число треугольных граней равно $Г_3$. Поэтому общее число ребер в треугольных гранях равно $3Г_3$. Аналогично, общее число ребер в четырехугольных гранях равно $4Г_4$ и т.д.

Поскольку каждое ребро многогранника содержится ровно в двух гранях, то при таком подсчете ребер мы каждое ребро посчитаем дважды, следовательно, будет иметь место равенство

$$2Р = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + 6Г_6 + \dots .$$

Аналогичным образом обозначим через $В_n$ число вершин, в которых сходится n ребер.

Тогда $В = В_3 + В_4 + В_5 + В_6 + \dots$

Значит, для числа ребер (Р) будет иметь место равенство

$$2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + 6В_6 + \dots$$

Воспользуемся равенством $4В - 4Р + 4Г = 8$, получающимся умножением обеих частей равенства Эйлера на 4.

Имеем

$$4В = 4В_3 + 4В_4 + 4В_5 + 4В_6 + \dots$$
$$4Г = 4Г_3 + 4Г_4 + 4Г_5 + 4Г_6 + \dots$$
$$4Р = 2Р + 2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + {}$$
$${} + 6В_6 + \dots + 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + 6Г_6 + \dots$$

Подставляя эти выражения в указанное равенство, получим:

$$В_3 + Г_3 - (В_5 + 2В_6 + \dots + Г_5 + 2Г_6 + \dots) = 8.$$

Из этого следует, что $В_3 + Г_3 \geq 8$, что и требовалось доказать.

В качестве приложения теоремы Эйлера рассмотрим задачу Эйлера о трех домиках и трех колодцах.

Задача 4. Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Решение. Попробуем провести требуемые дорожки. На рисунке 8 показано расположение дорожек, две из которых пересекаются. Попытки провести непересекающиеся дорожки к успеху не приводят. Однако это не означает, что этого нельзя сделать. То, что не получается у нас, может получиться у кого-нибудь другого. Если же мы предполагаем, что непересекающиеся дорожки провести нельзя, то это нужно доказать. Доказательство будем вести от противного. Предположим, что это можно сделать. Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые попарно не пересекаются.

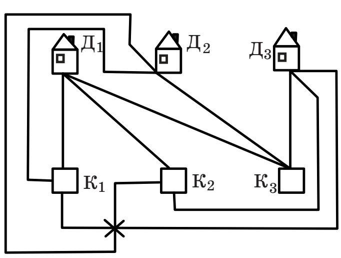


Рис. 8

Эти ребра образуют на плоскости сетку, аналогичную той, которая была получена при доказательстве теоремы Эйлера. Поэтому для числа вершин, ребер и граней этой сетки должно выполняться соотношение Эйлера $В - Р + Г' = 1$. Добавим к ней еще одну грань — внешнюю часть плоскости по отношению к исходному многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид $В - Р + Г = 2$, причем $В = 6$ и $Р = 9$. Следовательно, Г должно равняться пяти.

Заметим, что поскольку дорожки не соединяют между собой никакие два домика и никакие два колодца, то у рассматриваемой сетки нет треугольных граней. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество ребер должно быть не меньше $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, что противоречит тому, что их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен — нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

Задание на дом

1. Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

2. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

3. Гранями многогранника являются двенадцать правильных пятиугольников, и в каждой вершине сходится три ребра. Сколько у него вершин и ребер? Приведите пример такого многогранника.

4*. Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдется треугольная, четырехугольная или пятиугольная грань.

5*. Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдется трехгранный, четырехгранный или пятигранный угол.

6. Можно ли четыре домика соединить непересекающимися дорожками с четырьмя колодцами так, чтобы каждый домик был соединен с тремя колодцами и каждый колодец — с тремя домиками?

Ответы и решения

1. $4Г = 2Р$, $Г = 6$, $В = 2 + Р - Г$, $В = 2 + 12 - 6 = 8$. Итак, $В = 8$, $Р = 12$ и $Г = 6$. Примером такого многогранника является куб.

2. $4В = 2Р$, $В = 6$, $Г = 2 - В + Р$, $Г = 2 - 6 + 12 = 8$. Итак, $В = 6$, $Р = 12$, $Г = 8$. Примером такого многогранника является октаэдр.

3. $3В = 2Р$, $5Г = 2Р$. Подставляя выражения для В и Г в равенство $В - Р + Г = 2$, получим: $\frac{2}{3}Р - Р + \frac{2}{5}Р = 2$. Откуда находим $Р = 30$, $В = 20$. Примером такого многогранника является додекаэдр.

4*. Имеем равенства: $2Р = 3В_3 + 4В_4 + 5В_5 + 6В_6 + \dots$, $2Р = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + 6Г_6 + \dots$ Предположим, что у выпуклого многогранника нет треугольных, четырехугольных и пятиугольных граней. Тогда второе равенство можно переписать в виде $2Р = 6Г_6 + \dots$, и из него следует неравенство $2Р \geq 6Г$. Из первого равенства следует неравенство $2Р \geq 3В$ и, следовательно, неравенство $4Р \geq 6В$. Используя эти неравенства, получим: $6В - 6Р + 6Г \leq 0$. С другой стороны, по теореме Эйлера $6В - 6Р + 6Г = 12$. Получили противоречие. Значит, у любого выпуклого многогранника обязательно найдется треугольная, четырехугольная или пятиугольная грань.

5*. Решение аналогично решению задачи 4*.

6. Да.

Л. РОСЛОВА,
Москва

Обводимъ линiи

Попробуем линию, изображенную на рисунке 1, обвести *одним росчерком*, то есть не отрывая карандаша от листа бумаги и не проходя по одной и той же части линии более одного раза.

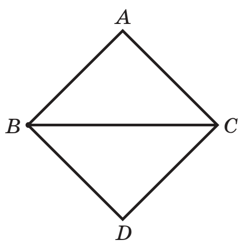


Рис. 1

Фигура эта, такая простая на вид, оказывается, имеет интересную особенность. Если мы начнем движение из узла B, то у нас это обязательно получится. Один из вариантов обвода показан на рисунке 2.

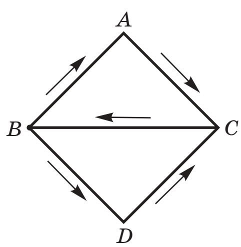


Рис. 2

А что будет, если мы начнем движение из узла A? Легко убедиться, что обвести линию в этом случае нам не удастся: у нас всегда будут оставаться непройденные отрезки, добраться до которых уже невозможно. Две такие неудачные попытки обхода показаны на рисунках 3 и 4.

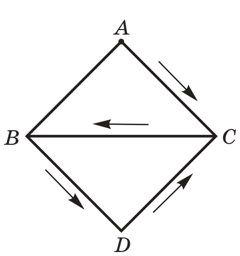


Рис. 3

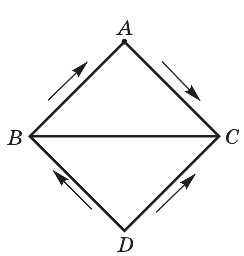


Рис. 4

Решите задачи 1—5:

1. а) Удастся ли обвести линию (см. рис. 1), если начать движение из узла C? а из узла D?

б) Вы начали движение из узла B. Где вы закончите движение?

2. Назовите все узлы линии (рис. 5), начав с которых ее можно обвести одним росчерком. Начертите в тетради линию одним росчерком, отметьте начало движения и покажите стрелками направление движения.

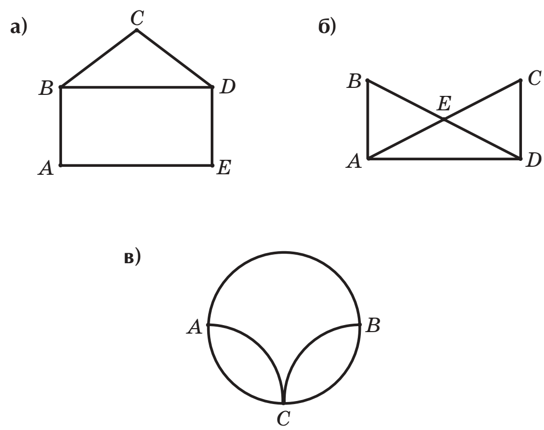


Рис. 5

3. На рисунке 6 изображена линия, которую вы, наверное, умеете рисовать одним росчерком. Это звезда. Оказывается, хотя она и выглядит значительно более сложной, чем предыдущие линии, обвести ее можно, начав с любого узла.

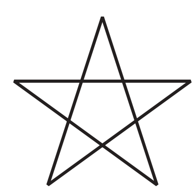


Рис. 6

Начертите звезду несколько раз, начиная движение из разных узлов.

4. Линию, изображенную на рисунке 7, как и звезду, можно начертить одним росчерком, начав движение из любого узла. Вычертите эту линию дважды: начав с узла, из которого выходят два отрезка, а затем из узла, из которого выходят четыре отрезка.

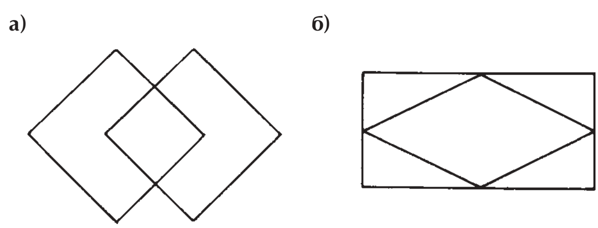


Рис. 7

5. Начертите линию одним росчерком (рис. 8).

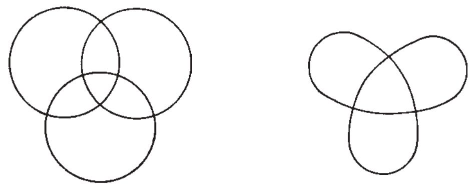


Рис. 8

А теперь попробуйте вычертить одним росчерком линию, изображенную на рисунке 9. Вам это сделать не удалось! Почему? Вы не можете найти нужный узел? Нет! Дело не в этом. Эту линию вообще нельзя вычертить одним росчерком.

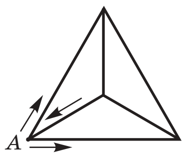


Рис. 9

Проведем рассуждения, которые убедят нас в этом. Попробуйте в них разобраться.

Рассмотрим узел A. Из него выходят три отрезка. Начнем вычерчивать линию с этого узла. Чтобы пройти по каждому из этих отрезков, мы должны выйти из узла A по одному из них, в какой-то момент обязательно вернуться в него по второму и тут же выйти по третьему. А вот снова войти уже не сможем! Значит, если мы начнем вычерчивание с узла A, то закончить в нем не можем.

Допустим теперь, что узел A не является началом. Тогда в процессе вычерчивания мы должны войти в него по одному из отрезков, выйти по другому и снова вернуться по третьему. А так как выйти из него мы уже не сможем, то узел A в этом случае должен являться концом.

Итак, узел A должен быть или начальным, или конечным узлом вычерчивания.

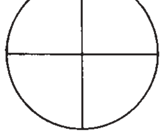
Но про три других узла нашей линии можно сказать тоже самое. Но ведь и начальным узлом вычерчивания может быть только один узел, и конечным узлом также может быть только один узел! А значит, вычертить эту линию одним росчерком невозможно.

> Линию нельзя вычертить одним росчерком, если она содержит более двух узлов, в которых сходится нечетное число отрезков.

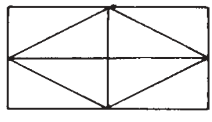
Решите задачи 6—8:

6. Какие линии, изображенные на рисунке 10, можно обвести одним росчерком, а какие — нельзя?

а)



б)



в)

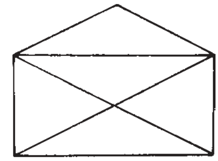


Рис. 10

7. Можно ли согнуть каркас куба (рис. 11) из единого куска проволоки? а из двух кусков, спаяв их в нескольких узлах?

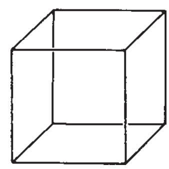


Рис. 11

8. Вспомните, как вы учились писать по прописям. Некоторые буквы вы писали не отрывая ручки от бумаги, другие же — нет. Какие из букв можно написать одним росчерком? Придумайте свой способ написания букв Б, К, Ж, Ф (рис. 12), при котором их можно вычертить одним росчерком.

Рис. 12

Начало вычерчиванию линий одним росчерком положила задача, которую обычно называют задачей о кенигсбергских мостах. Город Кенигсберг был расположен на берегах и двух островах реки Преголь. Различные части города были соединены семью мостами (рис. 13).

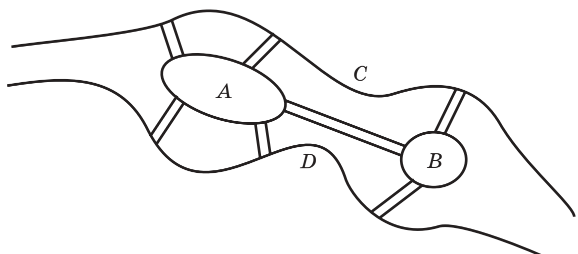


Рис. 13

Совершая прогулки в воскресные дни, горожане заспорили, можно ли выбрать такой маршрут, чтобы пройти один и только один раз по каждому мосту и затем вернуться в начальную точку пути? Долго бы спорили жители города, если бы через Кенигсберг не проезжал великий математик Леонард Эйлер. Он заинтересовался спором и... разрешил его. Решите и вы эту задачу, сделав схематический рисунок, на котором острова и берега реки были бы обозначены точками (A, B, C и D), а мосты — линиями.

Задача Леонарда Эйлера

Трое господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получил чужую шляпу?

В коллаже использованы силуэты Ф. Антинга «Группа академиков устанавливают бюст Леонарда Эйлера», 1784

Окончание. Начало см. на с. 39

7. Изучить склеивание многогранников «Картинная рама» и проследить за изменением эйлеровской характеристики.

8. Рассмотреть множество многогранников на целочисленной решетке (все вершины имеют целые координаты), составленных из единичных кубиков, и некоторые другие типы многогранников.

9. Рассмотреть аналоги теоремы Эйлера для плоских графов и для карт на сфере.

10. Проверить еще один из вариантов формулы Эйлера, который можно сформулировать так. Пусть все точки поверхности Земли (земного шара) суть либо точки наклона, либо вершины, либо котловины, либо перевалы. Тогда

$$B - \Pi + K = 2,$$

где B — число вершин, Π — число перевалов и K — число котловин. Нужные здесь определения и само доказательство формулы можно найти в статье М. Шубина «Топология и... рельеф местности» (Квант, 1982, № 8).

Завершить эти практические шаги можно сравнением различных доказательств формулы Эйлера и ее обобщений.

Литература

1. *Ашкинузе В.Г.* Многоугольники и многогранники// В книге «Энциклопедия элементарной математики». Т. — М.: Физматлит, 1963.

2. *Веннинджер М.* Модели многогранников. — М.: Мир, 1974.

3. *Долбилин Н.П.* Жемчужины теории многогранников. — М.: МЦНМО, 2000.

4. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? — 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2001.

5. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. — М.: Наука, 1967.

6. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Наука, 1975.

Шеф-редактор С. Островский
Главный редактор Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель ООО «Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя: ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (499)249 3138
Отдел рекламы: (499)249 9870
Редакция газеты «Математика»: тел.: (499)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru