К юбилею Я.И. Перельмана

В декабре этого года исполнится 125 лет со дня рождения уникального человека — Якова Перельмана. Этот человек — явление в нашей отечественной научно-популярной литературе. Он — популяризатор науки. Рассказывать неподготовленному читателю о сложных математических или физических материях может только тот, кто понимает саму суть этого явления. Перельман делал это не только доступно, но и ярко, интересно, увлеченно, круг его интересов был весьма обширен. Таких людей немного: рядом с ним я бы, пожалуй, поставила лишь американского математика Мартина Гарднера.

В связи с личностью Перельмана я подумала вот о чем: иногда кажется, что живет гениальный человек, генерирует какие-то идеи, воплощает их в жизнь, но его дело умирает вместе со своим гениальным автором. К счастью, это не так: идеи если и забывают, то на время — до следующего неугомонного, неравнодушного человека, способного подхватить и развить их, вдохнуть новую жизнь. Мысль о том, что научные идеи надо пропагандировать, зажигать ими молодые умы, казалось бы, была актуальна только в 20–30-е годы, когда «широкие народные массы», как было принято говорить, получили доступ к образованию, а в эпоху всеобщего среднего необходимость в этом отпала. Оказывается это не так, потому что молодые умы, перегруженные формальными знаниями, с которыми не знают, что делать, задаются вопросами: зачем? что мне это даёт? где применяется? И снова находятся энтузиасты, готовые отвечать на эти вопросы: один из них — японский математик Джин Акияма, о котором мы писали не так давно. Профессиональный математик, занимавшийся подготовкой японских школьников к международным олимпиадам, пришел к идее, что рассказывать о математике, показывать красоту математических идей надо всем, а не только тем, кто интерес к этому уже проявляет. Он подхватил и другую идею Перельмана — создание Дома занимательной науки. На берегу Охотского моря Акияма создал математический Диснейленд со множеством моделей, которые оживают в его руках, в руках маленьких посетителей, демонстрируя какую-то математическую теорему или закономерность. Остается надеяться, что когда-нибудь что-то подобное удастся создать и в нашей стране.

А мы хотим предложить вам вспомнить о нашем с вами замечательном соотечественнике, рассказать о его жизни, о его книгах своим ученикам. Многое, о чем в них написано, интересно и сейчас. В них много идей, которые можно использовать для урока: замысел урока, который вы найдете в этом номере, как раз и навеян рассказом из книги Перельмана «Занимательная геометрия». Возможно, вы уже пользуетесь на уроках математическими фокусами или ребусами, задачами на построение на местности, или вам захочется провести внеклассное мероприятие по мотивам его книг. Поделитесь этим с коллегами. Наиболее удачные материалы мы опубликуем в номере газеты, который выйдет в конце года и будет посвящен Якову Перельману. И подготовим подарки: книги по занимательной математике.

Л. Рослова

В ЭТОМ ВЫПУСКЕ

ВНИМАНИЕ, АНОНС!

Читайте в № 9 и № 10 газеты «Математика»

#12

1—30 апреля 2007 г.

Электронный информационный спутник газеты «Математика»

В. БАЛАБАНОВА,
р.п. Белый Яр, Тюменская обл.

Решение прикладных задач по теме «Наибольшее и наименьшее значения функции»

Учитель. Ребята, я хочу начать наш урок с фрагмента рассказа Л.Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно» о крестьянине Пахоме, покупавшем землю у башкирцев.

— А цена какая будет? — говорит Пахом.

— Цена у нас одна: 1000 р. за день.

Не понял Пахом.

— Какая же это мера — день? Сколько в ней десятин будет?

— Мы этого, — говорит, — не умеем считать. А мы за день продаем; сколько обойдешь в день, то и твое, а цена 1000 р.

Удивился Пахом.

— Да ведь это, — говорит, — в день обойти земли много будет.

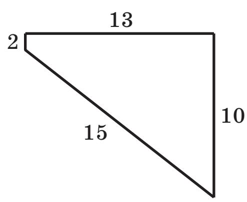
Засмеялся старшина.

— Вся твоя, — говорит. — Только один уговор: если назад не придешь в день к тому месту, с какого возьмешься, пропали твои деньги.

— А как же, — говорит Пахом, — отметить, где я пройду?

— А мы станем на место, где ты облюбуешь; мы стоять будем, а ты иди, делай круг, а с собой скребку возьми и, где надобно, замечай, на углах ямки рой, дернички клади; потом с ямки на ямку плугом пройдем. Какой хочешь круг забирай, только до захода солнца приходи к тому месту, с какого взялся. Что обойдешь, все твое.

Фигура, которая получилась у Пахома, изображена на рисунке. Что это за фигура?



[Прямоугольная трапеция.]

А периметр ее мы можем найти?

[$P = 2 + 13 + 10 + 15 = 40$ км.]

Какова площадь этой трапеции?

$$\left[S = \frac{2+10}{2}\cdot 13 = 78 \text{ км}^2.\right]$$

Ребята, как вы думаете, наибольшую ли площадь получил Пахом?

Сегодня на уроке мы это и выясним. Чтобы решить поставленную задачу, нам необходимо вспомнить:

1. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции.

2. Какие точки называются критическими?

На доске написано:

а) $y = x^3$, $x \in [-2; 3]$; б) $y = -5x$, $x \in [-2; 3]$.

Задание. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном промежутке.

Учитель. Запишем в тетради следующую задачу.

Задача. Периметр прямоугольника равен 60 см. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы площадь была наибольшей?

Решение. Пусть a и b — стороны прямоугольника, тогда

$P = 2(a + b) = 60$, $a + b = 30$, $S = a\cdot b$, $b = 30 - a$.

Вспоминаем вместе с учащимися алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

1. Выбираем независимую переменную x и выражаем через нее стороны прямоугольника: x — длина прямоугольника, $30 - x$ — ширина прямоугольника. Тогда $0 < x \le 30$.

2. Записываем функцию:

$$S(x) = x\cdot(30 - x) = 30x - x^2.$$

3. Находим производную: $S'(x) = 30 - 2x$.

4. Находим критические точки: $30 - 2x = 0$, $x = 15$.

Значит, длина прямоугольника равна 15 см, а ширина равна $30 - 15 = 15$ см.

Какая это фигура?

[Квадрат.]

Ответ: квадрат со стороной 15 см.

Учитель. А теперь вернемся к задаче, с которой мы начали урок. Значит, какую фигуру Пахом должен был обойти?

[Квадрат.]

$P = 40$ км, $a = 10$ км, $S = 10\cdot 10 = 100$ км^2.

Учитель. Решите еще две задачи прикладного характера.

Задача с физическим смыслом. Материальная точка движется по закону $h(t) = 2 + 6t - 4t^2$, где $h(t)$ — путь в метрах и t — время в секундах. Какой путь пройдет точка до остановки?

Ответ: 4,25 м.

Задача с геометрическим смыслом. Найдите размеры коробки наибольшего объема, в основании которой лежит квадрат, а полная поверхность равна 12 м^2.

Ответ: 2 м и 1 м.

Т. ЖАВОРОНКОВА,
г. Пятигорск, Ставропольский край

Советы по установлению добрых отношений с параметрами

Более 10 лет я преподаю математику и физику по программе углубленного изучения данных предметов с 8-го по 11-й класс. Мне нравятся мои ученики, радуют их результаты последующего обучения в вузах Москвы и Санкт-Петербурга, а когда меня спрашивают о самых сложных этапах работы, то я неизменно отмечаю математику в 8-м классе и физику в 9-м. Если в этом возрасте не формируется умение задавать вопросы самому себе и искать самостоятельно ответы на них, ученики сталкиваются с большими проблемами в работе с нестандартными заданиями в старшей школе.

Училась в моем классе прекрасная девочка Вика, обладавшая множеством талантов: она замечательно танцевала, хорошо рисовала, а также умела критически взглянуть на самые разнообразные проблемы. Сейчас Вика заканчивает МАИ, а многочисленные беседы, инициированные ею в классе, позволяют мне лучше понимать моих нынешних учеников. Сразу отмечу, что в том выпуске были и более способные ребята, однако опыт моей работы подсказывает, что ориентироваться на их уровень понимания проблем на начальном этапе обучения нельзя.

Контрольные работы с 8-го класса я проводила по следующей схеме: у ребят был избыточный набор заданий, которые оценивались различным числом баллов, и для получения отметки «отлично» можно было выбрать задачи самому. И практически никто из учащихся не выбирал задания с параметрами. Мне приходилось придумывать самостоятельные работы, состоявшие только из подобных задач, фактически переходя от демократии к диктатуре. Ситуация стала меняться к лучшему после разговора именно с Викой. Она честно рассказала о всех «глупых» вопросах и сомнениях, которые вызывали мои задания, а потом выяснилось, что эти же проблемы возникали и у других ребят. Разрешали мы их в ходе бесед, которые носили неформальный характер.

В данной статье *курсивом* выделены мысленные или прямые вопросы учащихся, а также сформулированные ими в итоге советы (правила) по обращению с параметрами. Возможно, эти советы помогут и другим ученикам.

Четкий голос преподавателя: «Задание на доске. Приступайте к решению». И мои глаза видят следующую запись: $(a + 1)\cdot x = a^2 - 1$. *Что нужно делать? Кажется, я отвлеклась, что-то пропустила. Что я могу? Раскрыть скобки, разделить, умножить, сложить? Что вначале: умножить, или все же не трогать скобки? И зачем? Похоже, без повторной формулировки задачи не обойтись. «Что это?» — вопрос соседу. И его грустная констатация: «Опять уравнение с параметром». Наводящий вопрос соседу: «Параметр — это что?» «Буквочка, не помнишь?» Но их здесь две! И в тот момент, когда ты уже отказалась от борьбы, откуда-то изнутри возникает фраза: «Никогда не сдавайся!»*

После подобных размышлений Вика сама решила постараться определить, что же мешает понять условие задачи. Правда, на это ушло несколько дней домашней работы и консультаций с учителем.

Начнем с другого: что я в этом задании понимаю? На доске написано УРАВНЕНИЕ.

Вика хорошо училась в 5–7-х классах, по математике у нее были только пятерки. Да и заглянуть в сохранившиеся учебники прошлых лет труда не составило.

«Математика. 5 класс». Автор — Н.Я. Виленкин.

«Уравнением называется равенство, содержащее букву, значение которой надо найти». «Значение буквы, при котором из уравнения получается верное числовое равенство, называют корнем уравнения». «Решить уравнение — значит найти все его корни (или убедиться, что это уравнение не имеет ни одного корня)». А в учебнике 7-го класса появляется дополнительное пояснение: буква скрывает под собой неизвестную величину; равенства бывают с одной или двумя неизвестными величинами.

А с тремя бывают? А с десятью?

Мы, оказывается, уже «проходили» линейные уравнения с одним или двумя неизвестными. Вспоминаю: $x + 3 = 5$, $x + y = 4$ *— тоже уравнения.*

«Решением уравнения называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство».

У нас на доске равенство с двумя буквами. Мы на верном пути и сейчас получим способ борьбы с им.

А сколько таких пар существует? И как их найти? Попробуем подобрать: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ *— не подходит;* $x_2 = 2$, $y_2 = 2$ *— сошлось!*

Все?

Нет, $x_3 = 3$, $y_3 = 1$ *— тоже подходящая парочка. Как же учили?* $y = 4 - x$. *Берем любое* x*, получаем любое* y*. Как красиво записать ответ? Ага,* $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. *Кажется, я подразумевала не то, x я могу взять любое, а y для него определяется по правилу* $y = 4 - x$.

Да, между переменными есть связь, они подчиняются определенному ***закону***.

Понятно, значит, x можно брать любое, а y вычислять по формуле.

Необязательно. Зная y, можно найти для него подходящее x, обращающее уравнение в верное числовое равенство. Решая уравнение с двумя переменными, мы пытаемся установить закон, который связывает их.

А всегда ли этот закон существует? $x + y = x + y$. *Здесь я не промахнусь, записав* $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$. *Красота! Бери x — любое, бери y — любое, и все получается. Свобода! x и y свободны друг от друга, между их значениями нет связи. Вот бы таких уравнений побольше на уроках предлагали! Но, кажется, эти уравнения имеют и другое название…*

А бывает ли так, что для одной неизвестной величины закон писан, а для другой — нет?

Рассмотри уравнение

$$(x + 1)((y + 1)(y - 1) - y^2) = 0.$$

Как там говорилось на кружке? Раскрою скобки. Я получаю ***равносильное*** *уравнение* $(x + 1)\cdot(-1) = 0$. *(Красивое слово — равносильность, там еще произносили слово «транзитивность»: надо как-то перенести занятия по танцам, а то я посещаю только половину занятий кружка и не все понимаю.) А где же y? Оказывается, равенство от него не зависит, y может быть любым. Что же получается? Решением уравнения будет любая пара чисел, в которой первое число, соответствующее x, равно* -1. $(-1;\ y$ *— любое*$)$, $(-1;\ y \in \boldsymbol{R})$, *а лучше запишем так, как раньше:* $(-1;\ y)$, *где* $y \in \boldsymbol{R}$.

Попробуем подвести первые итоги. Уравнения с двумя «буквами» мы уже встречали, правда, называли их уравнениями с двумя неизвестными. Упорядоченные пары значений переменных, при подстановке которых в уравнение мы получаем верное равенство, называются решениями уравнения. Решая уравнение с двумя переменными, мы старались найти все такие возможные пары или доказать, что их вообще не существует.

И еще остается проблема представления, предъявления решений, если их очень много или даже бесконечно много.

Рассмотрим простейшее линейное уравнение с двумя неизвестными:

$$x + 2y = 1. \qquad (1)$$

В этом уравнении переменные величины x и y совершенно равноправны: $x = 1 - 2y$, а $y = \dfrac{1-x}{2}$.

Тогда решения уравнения — пары значений:

а) $(1 - 2y;\ y)$, где $y \in \boldsymbol{R}$;

б) $\left(x;\ \dfrac{1-x}{2}\right)$, где $x \in \boldsymbol{R}$.

Пар значений подобного вида бесконечно много, а задают они и в форме а), и в форме б) одно и то же множество решений.

Упорядоченной паре значений переменных можно сопоставить координаты некоторой точки в декартовой системе координат, тогда каждому решению уравнения (1) соответствует точка на этой координатной плоскости. Всё же множество решений задает некоторую прямую на координатной плоскости $0xy$.

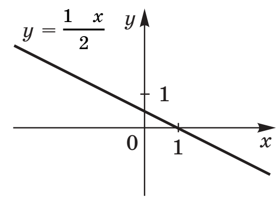


Рис. 1

Значит, если переменных две, то решений бесконечно много?

Уравнение с двумя переменными необязательно должно иметь бесконечно много решений; например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ имеет одно решение — пару значений переменных $(0;\ 0)$, а уравнение $x^2 + y^2 = -1$ вообще решений в действительных числах не имеет.

Все это прекрасно, но пока что нам нигде не встречалось зловредное слово «параметр». Для чего использовать его, когда так просто сразу обе переменные величины назвать неизвестными?

Ограничимся присутствием двух букв в записи уравнения. Что означает разделение на два класса: неизвестная величина и параметр?

Да зачем их вообще разделять?

Давайте попробуем поразмышлять. Вот известный тебе закон Ома: $I = \dfrac{U}{R}$. Что изменится, если ты его запишешь в виде $R = \dfrac{U}{I}$? Чем отличается одна форма представления закона от другой? Первую форму записи можно трактовать как зависимость силы тока от напряжения и сопротивления, а вторую — как зависимость сопротивления от напряжения и силы тока. С точки зрения физики, имея проводник некоторого сопротивления и меняя приложенное к нему напряжение, мы исследуем силу тока в электрической цепи. В предположении, что $R = \mathrm{const}$, эта форма записи четко разделяет переменные: аргумент функции —

независимая переменная U, R — неизвестное, но постоянное значение, $I = I(U)$. Физическая величина — сопротивление R в нашем случае не зависит от силы тока и приложенного напряжения. Однако есть и более сложные ситуации, когда сопротивление нелинейных элементов в электрической цепи зависит от приложенного напряжения. Таким образом, исследователь, изучая некоторую проблему, ищет связь между физическими величинами, одна из которых меняется в ходе эксперимента, а другая от нее зависит.

Кстати, в классической физике величиной, которая является независимым аргументом, было время. И основной задачей механики было изучение движения одних тел относительно других с течением времени.

Параметр — это фиксированное, но неизвестное число. Для этапа представления результата признание одной величины неизвестной переменной, а другой — фиксированным неизвестным числом позволяет сделать вывод о том, что при решении уравнения мы должны разрешить параметру «носить маску неизвестности» буквально до последнего мгновения, до ответа. Как видно на примере даже самых простых заданий, мы обычно решаем различные классы задач, делая предположение о том, какие значения может принимать параметр. Результат же нашей работы позволяет для любого допустимого значения параметра выбрать среди исследованных классов задач ту, что соответствует выбранному числовому значению параметра. Мы должны получить неизвестную величину из уравнения в виде некоторого выражения, возможно многозначного, которое может зависеть от параметра. Если параметр «сбрасывает маску», то есть мы приписываем ему определенное численное значение, то правильно записанный ответ позволяет, при подстановке этого численного значения в формулу, найти числовое решение уравнения, то есть значение неизвестной переменной.

Вспомню запись на доске: $(a + 1)\cdot x = a^2 - 1$.

Есть ли правило, которое позволяет одну величину считать в этом уравнении неизвестной, а другую — параметром?

Когда речь идет о задачах, предлагаемых на уроках математики, выбор чаще всего определяется автором задачи, желаемой для него формой представления результата. Кстати, если посмотреть на формулы, задающие физические законы, то мы можем увидеть число буквенных обозначений, намного превышающее два. Так что, по сути, мы имеем дело с решением задачи со многими переменными или с несколькими значениями параметра.

Давайте попробуем сыграть в две различные игры.

Правила 1-й игры: x — неизвестное, a — параметр; мы хотим установить закон, позволяющий по значению a находить значения x, превращающие уравнение в верное равенство при одновременной подстановке в него численных значений a и x. Переменная x входит в уравнение в первой степени, относительно x это уравнение — линейное.

Мы можем рассматривать x в качестве неизвестного сомножителя в уравнении на доске.

Всегда ли, задав произведение и один из сомножителей, мы можем найти другой? Увы, нет. Представь, что ты решаешь уравнения.

1. $2\cdot x = 6$, $x = 3$.
2. $0\cdot x = 4$ — ни одного x для обращения уравнения в верное равенство подобрать не удается.
3. $0\cdot x = 0$ — любое x обращает уравнение в верное равенство.

Но ведь у нас нет чисел, а стоит ли это непонятное «фиксированное в маске» a.

А мы на его загадочность и таинственность даем адекватный ответ, как бы устанавливая фильтры, проходя через которые фиксированный незнакомец сообщает интересующую нас информацию.

Вход для $a + 1 = 0$.

Сюда может попасть только $a = -1$. Во что превратится уравнение при $a = -1$? $0\cdot x = 0$. В него можно подставлять любое x, равенство при этом остается верным.

Вход для $a + 1 \neq 0$.

Так как $a + 1 \neq 0$, то дробь, определяющая x: $x = \dfrac{a^2 - 1}{a + 1}$ существует. Теперь можно подумать и над тем, как ее упростить: $x = a - 1$.

Мы готовы теперь к тому, что a «скинет» свою маску.

Ответ: если $a = -1$, то решением уравнения является любое действительное число; если $a \neq -1$, то, зная это a, можно найти значение x, обращающее уравнение в верное равенство, пользуясь формулой $x = a - 1$.

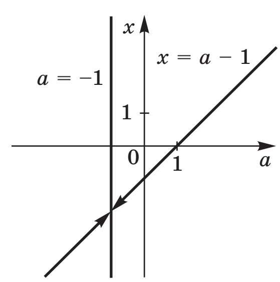


Рис. 2

Полученные результаты можно наглядно трактовать и с помощью графических методов. Давайте введем координатную плоскость $0ax$; ось абсцисс — $0a$, ординат — $0x$. На этой плоскости удобно изобразить линии, позволяющие определять по известному значению a удовлетворяющие уравнению неизвестные значения x. Именно по этой причине мы выбрали для представления значений a ось абсцисс, а значений x — ось ординат.

У нас есть две зависимости: $x \in \boldsymbol{R}$ при $a = -1$ и $x = a - 1$ при $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq -1$.

Так сколько же у нас решений? Два или бесконечно много?

Для ответа на этот вопрос подумаем, что скрывается за формулировкой, нас терзающей: «Сколько решений имеет уравнение?» Пусть это будет наш «знакомый» $(a + 1)x = a^2 - 1$. Сколько ***одновременно*** значений a можно в него подставлять, чтобы искать x? Ответ элементарно прост: одно. А вот сколько при этом a будет получаться устраивающих нас значений x, столько и будет решений у нашего уравнения. Из рисунка 2 следует, что при любом $a \neq -1$ уравнение имеет ровно одно решение (одному значению a соответствует одно значение x), а при $a = -1$ решений бесконечно много ($a = -1$ соответствует любое действительное x).

Зачем на прямой $x = a - 1$ изображены стрелочки?

Они показывают, что при $a = -1$ на этой прямой нам в поисках x находиться нельзя.

А нельзя ли их заменить привычной выколотой точкой?

Нет, так как тогда эту точку мы должны будем отнести и к прямой $a = -1$, а на этой прямой запрета x принимать значение -2 нет.

Устанавливаем *правила 2-й игры*: a — неизвестная переменная, x — параметр.

Мы хотим установить закон, позволяющий по значению x находить значения a, превращающие уравнение в верное равенство при одновременной подстановке в него численных значений a и x.

Неизвестная переменная a входит в уравнение во второй степени, относительно a это уравнение — квадратное. Преобразовав его к виду $\left(a - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$, получаем $a_1 = -1$, $a_2 = x + 1$. Решение a_1 уравнения не зависит от значения параметра x, а решение a_2 получается различным для различных x.

Мы готовы сформулировать ответ: для всех действительных значений параметра x, входящих в уравнение, его решениями будут два значения: $a_1 = -1$, $a_2 = x + 1$, то есть каждому значению параметра x соответствуют два различных значения a, превращающих уравнение в верное равенство.

Нет ли неточности в нашем ответе?

Есть. Оказывается, что при $x = -2$ $a_1 = a_2$.

Представим результаты 2-й игры на координатной плоскости $0xa$; по оси абсцисс откладываем значения параметра x, по оси ординат — значения переменной величины a.

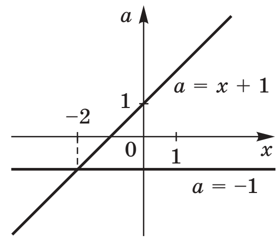


Рис. 3

Для каждого $x \neq -2$ существуют два значения a, которые при подстановке с соответствующим x в исходное уравнение обращают его в верное равенство; значению $x = -2$ соответствует только одно значение $a = -1$.

На первое знакомство с параметром потрачено немало усилий. Но, возможно, «сольются тысячи дорог в один великий путь», а предложенные для сравнительного анализа рисунки 2 и 3, точнее, элементы симметрии этих рисунков при изображении их в одной системе координат дадут возможность начать разговор о таком важном понятии в математике, как обратная функция и условия ее существования.

Советы по установлению добрых отношений с параметрами

1. Не бойся «незнакомца в маске».
2. Всегда анализируй условие поставленной задачи.
3. Различай параметр и неизвестную величину.
4. Подумай о том, кто в поставленной задаче определяет правила «игры»: ты или автор? До какой степени ты свободен в выборе способа решения и представления результата?
5. Если установлено, что в задаче играет роль параметра, постарайся через него выразить неизвестную величину.
6. Обращайся с параметром деликатно, проверяй возможность совершения тех или иных действий.
7. Учись проводить разветвления в ходе решения задачи, качественно изменяющие его в зависимости от возможных численных значений параметра. Предлагай испытания для параметра, заставляющие его «снимать маску».
8. Старайся привлекать графики для получения решения и интерпретации результатов.
9. Привыкай к использованию координатной плоскости, в которой по оси абсцисс откладывается параметр, а по оси ординат — неизвестная переменная.
10. Особое внимание уделяй представлению ответа, он может быть объемнее решения.
11. Не избегай встреч с параметром, не пасуй перед трудностями. Самое интересное может скрываться за трудно открываемыми дверями.

Г. ШАРЫГИН,
Москва

Вписанные четырехугольники

В элементарной геометрии можно встретить очень много задач, решение которых основано на следующем свойстве углов, вписанных в окружность.

Теорема 1. Угол, вписанный в некоторую окружность, равен половине центрального угла той же окружности, опирающегося на соответствующую дугу (рис. 1).

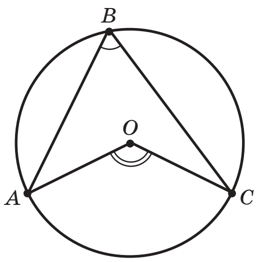


Рис. 1

Это простое утверждение, доказательство которого можно найти в любом учебнике, чрезвычайно важно для всего курса геометрии. Можно сказать, что значительная часть теорем школьной (и не только школьной) планиметрии основана на далеких следствиях этого факта[1]. Мы начнем наш рассказ с самых простых из них и постараемся ввести читателя в круг идей и методов, используемых при доказательстве наиболее сложных утверждений планиметрии. Для начала отметим два очевидных следствия из теоремы 1.

Следствие 1. Два вписанных угла, опирающиеся на равные дуги, равны между собой. В частности, два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны ($\angle BAD$ и $\angle BCD$ на рис. 2). Углы, опирающиеся на дополнительные дуги ($\angle BAD$ и $\angle BED$ на рис. 2), в сумме равны 180°.

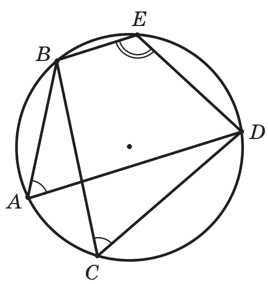


Рис. 2

Следствие 2. Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром окружности, описанной около этого треугольника. Таким образом, центром этой окружности служит середина гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы (рис. 3).

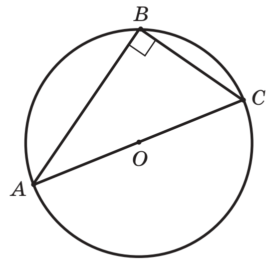


Рис. 3

Уже этих двух следствий бывает достаточно, чтобы решать многие интересные задачи. Рассмотрим, например, следующую.

Задача 1. Три прямые на плоскости пересекаются в одной точке таким образом, что все попарные углы между ними равны между собой (и, значит, равны 60°). Из точки M, не лежащей ни на одной из этих прямых, опущены перпендикуляры на эти прямые. Доказать, что треугольник, вершинами которого являются основания этих перпендикуляров, правильный.

Решение. Пусть точки A, B и C — основания опущенных из M перпендикуляров, а O — точка пересечения прямых. Рассмотрим треугольники OAM, OBM и OCM. Это прямоугольные треугольники ($\angle OAM = \angle OBM = \angle OCM = 90^\circ$) с общей гипотенузой OM. Согласно следствию 2 это значит, что описанные окружности этих треугольников совпадают. Таким образом, все отмеченные точки (O, M, A, B и C) лежат на одной окружности (рис. 4). Рассмотрим теперь углы AOC и ABC. Из сделанного замечания следует, что эти углы вписаны в одну и ту же окружность и опираются на одну и ту же дугу AC. Значит (следствие 1), они равны: $\angle ABC = \angle AOC = 60^\circ$. Аналогичным образом находим, что $\angle CAB = \angle COB = 60^\circ$. Отсюда следует, что угол ACB также равен 60°, то есть треугольник ABC — правильный.

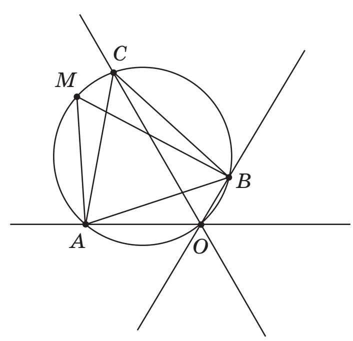


Рис. 4

[1] В качестве другого, не менее важного источника геометрических идей мы бы назвали теорию подобия.

Ключевой пункт приведенного решения — то место, где на основании следствия 2 мы заключаем, что некоторые точки лежат на одной окружности, поэтому образованные ими углы являются вписанными в одну и ту же окружность, а значит, эти углы равны. Это замечание — простейший пример применения метода *вспомогательной окружности*. Полезно сформулировать наше наблюдение в общем виде отдельно.

Теорема 2. Если углы ABC и ADC — прямые, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Вот еще один пример использования этого факта. Всем хорошо известно, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке. Доказательство этой теоремы, которое обычно приводится в школьных учебниках, основано на нетривиальном дополнительном построении. Между тем существует огромное количество различных доказательств этого факта, использующих самые разные геометрические методы.

Мы приведем доказательство, использующее развитые выше идеи. Итак, решим следующую задачу.

Задача 2. Доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Решение. Для простоты рассмотрим только случай остроугольного треугольника. Однако приведенные рассуждения легко перенести и на случай тупоугольного треугольника, для этого потребуется лишь изменить порядок букв в некоторых обозначениях. Сделать это мы предлагаем читателю.

Итак, пусть ABC — треугольник, AA' и BB' — высоты этого треугольника, опущенные из его вершин A и B. Пусть H — точка пересечения отрезков AA' и BB' (рис. 5). Утверждение теоремы эквивалентно тому, что прямая CH перпендикулярна AB. Именно это мы и будем доказывать.

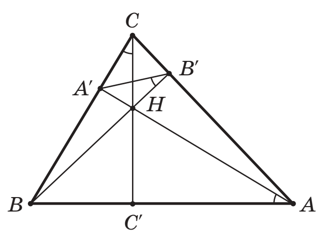


Рис. 5

Рассмотрим треугольники $AA'B$ и $BB'A$. Они имеют общую гипотенузу AB. По доказанному точки A, B, A' и B' лежат на одной окружности, причем $\angle A'B'B = \angle A'AB$ (эти углы опираются на одну и ту же дугу $A'B$). Применив теперь те же соображения к треугольникам $HA'C$ и $HB'C$, получим, что $\angle HCA' = \angle HB'A' = \angle BB'A'$, следовательно, $\angle HCB = \angle A'AB$.

Пусть C' — точка пересечения прямых CH и AB. Рассмотрим треугольники $CC'B$ и $AA'B$. Они имеют общий угол ($\angle B$). При этом углы $C'CB$ и $A'AB$, как мы доказали выше, равны. Следовательно, оставшиеся углы этих треугольников тоже равны:

$$\angle BC'C = \angle AA'B = 90°.$$

Теорему 2 можно назвать *признаком вписанного четырехугольника*: она позволяет определить, когда четыре точки лежат на одной окружности. Надеюсь, вы уже убедились в исключительной полезности этой теоремы. Но это далеко не единственная теорема подобного рода. Существует много иных полезных признаков, основанных на сравнении углов, образованных прямыми, проходящими через указанные точки, длин отрезков, соединяющих точки, и других элементов четырехугольника.

Докажем теперь следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3. Точки A, B, C и D лежат на одной окружности, если и только если выполнено любое из двух следующих утверждений:

- точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD, и выполнено равенство

$$\angle ABD = \angle ACD \qquad (1)$$

(иными словами, углы, опирающиеся на один отрезок, равны);

- точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC, и при этом

$$\angle ABC + \angle ADC = 180° \qquad (2)$$

(то есть сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°).

Теорема 3 — самый известный из существующих признаков вписанного четырехугольника. Отметим, что теорема 2 является ее частным случаем. В самом деле, если B и D лежат по одну сторону от AC, то получается, что равные углы ABC и ADC опираются на отрезок AC. Если же эти точки лежат по разные стороны от AC, то противоположные углы ABC и ADC четырехугольника $ABCD$ равны по 90°, и их сумма — 180°.

Как и у всех теорем геометрии, у теоремы 3 есть множество доказательств. Мы приведем два из них (еще одно возможное доказательство можно найти самостоятельно с помощью задачи 6, см. ниже). Первое из доказательств — наиболее распространенное, его можно найти в большинстве курсов элементарной геометрии.

Первое доказательство. Очевидно, что если точки A, B, C и D лежат на одной окружности, равенства выполнены (это следует непосредственно из следствия 1). Таким образом, надо доказать лишь обратное утверждение: если выполнено любое из равенств (1), (2), то четыре указанные точки лежат на одной окружности.

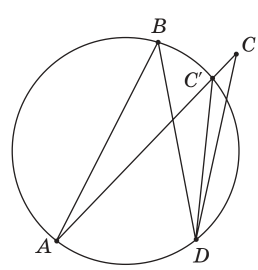


Рис. 6

Предположим, что для точек A, B, C, D выполняется равенство (1). Опишем окружность около треугольника ABD. Если точка C лежит на ней, то утверждение теоремы выполнено. В противном случае обозначим точку пересечения этой окружности с прямой AC буквой C'. Будем считать, что точка C' лежит между A и C (рис. 6). Если точка C лежит между A и C', доказательство не изменится.

Рассмотрим четырехугольник $ABC'D$. Все четыре его вершины лежат на одной окружности, поэтому для них выполняется равенство (1): $\angle ABD = \angle AC'D$. Но согласно условию $\angle ABD = \angle ACD$, следовательно, $\angle ACD = \angle AC'D$. Из этого следует, что $AC \parallel AC'$, чего не может быть.

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что если вместо равенства (1) для точек A, B, C и D выполнено равенство (2), то доказательство аналогично (рис. 7).

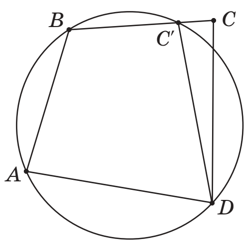


Рис. 7

Такое или почти такое доказательство должно приходить на ум любому ученику средней школы. В то же время доказательство, которое мы предложим теперь, — весьма элегантно и ценно скорее своим изяществом, нежели практическими следствиями[2].

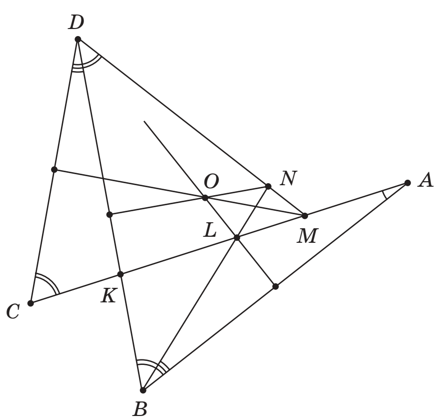


Рис. 8

Второе доказательство. Пусть для точек A, B, C и D выполняется равенство (1). Обозначим буквой K точку пересечения отрезков BD и AC (рис. 8). Прежде всего заметим, что из равенства углов ABD и ACD следует равенство углов BAC и BDC (достаточно рассмотреть треугольники AKB и DKC с вертикальными углами: $\angle AKB = \angle DKC$).

Пусть для определенности $\angle ABD > \angle BAC$. Проведем из точки B луч BL (точка L лежит на AC) так, что $\angle ABL = \angle BAC$, а из точки D — луч DM (M — точка на AC) так, что $\angle MDC = \angle ACD$. Пусть N — точка пересечения лучей BL и DM (для определенности мы считаем, что L лежит между B и N). Тогда

$$\angle DBL = \angle ABD - \angle ABL = \angle ACD - \angle BAC = \\ = \angle MDC - \angle BDC = \angle BDM.$$

Таким образом, вследствие равенства углов образовалось три равнобедренных треугольника: ALB, BND и CMD (см. рис. 8). Следовательно, серединные перпендикуляры к отрезкам AB, BD и CD являются одновременно биссектрисами углов ALB, BND и CMD. Но эти углы являются внешними ($\angle BND$ и $\angle ALB = \angle CLN$) и внутренним ($\angle CMD = \angle LMN$) углами треугольника LMN. Следовательно, их биссектрисы пересекаются в одной точке — центре вневписанной окружности треугольника LMN. Эта точка, будучи одновременно точкой пересечения серединных перпендикуляров, равноудалена от всех вершин четырехугольника $ABCD$ и, следовательно, является центром описанной окружности этого четырехугольника.

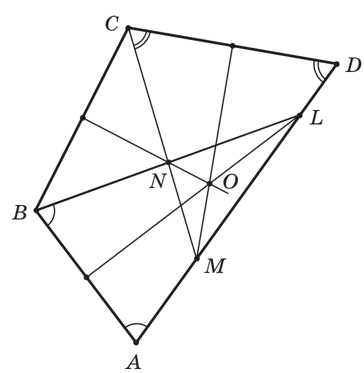


Рис. 9

Пусть теперь вместо равенства (1) выполняется (2). Заметим, что раз сумма углов четырехугольника равна 360°, условие (2) эквивалентно равенству

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle BAD + \angle BCD.$$

Положим для определенности, что $\angle ABC > \angle BAD$, и перепишем предыдущее равенство в виде:

$$\angle ABC - \angle BAD = \angle BCD - \angle ADC.$$

Теперь достаточно отложить от прямой AB в точке B угол, равный $\angle BAD$, а от CD в точке C — угол, равный $\angle ADC$ (рис. 9). Мы опять получим три равнобедренных треугольника, только на этот раз все биссектрисы углов при вершинах этих треугольников будут являться биссектрисами внутренних углов маленького треугольника LMN. Их точка пересечения O будет равноудалена от точек A, B, C и D.

[2] Другим достоинством этого доказательства является возможность перенести вторую его часть на сферические четырехугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского.

Доказанная теорема, несмотря на свою простоту (а может быть, и благодаря ей), находит многочисленные применения в элементарной геометрии. Приведем несколько примеров.

Следующая задача взята из книги Р.К. Гордина «Планиметрия. Задачник, 7–9 классы» (задача 2.642).

Задача 3. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Через вершины B и C проведены биссектрисы BD и CE внутренних углов. Пусть отрезки BD и CE пересекаются в точке M. Тогда $MD = ME$.

Решение задачи основано на следующем простом утверждении, которое оказывается полезным во многих других случаях.

Лемма 1. Если I — центр вписанной окружности треугольника ABC, то угол BIC равен $90° + \dfrac{\angle A}{2}$ (рис. 10).

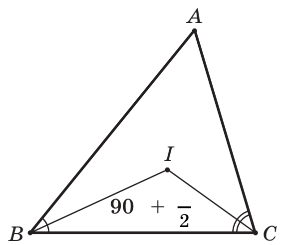


Рис. 10

Доказательство. Поскольку сумма углов треугольника равна $180°$, то

$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90°.$$

С другой стороны, центр вписанной окружности треугольника является точкой пересечения биссектрис, поэтому

$$\angle BIC = 180° - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} =$$

$$= 90° + \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2}.$$

Решение. Из леммы следует, что

$$\angle EMD = \angle BMC = 90° + \frac{1}{2}\angle A = 90° + 30° = 120°.$$

Следовательно,

$$\angle DAE + \angle DME = 60° + 120° = 180°,$$

откуда следует, что точки D, A, E и M лежат на одной окружности (рис. 11). Но AM — биссектриса, и, значит, хорды EM и DM, на которые опираются углы EAM и DAM, равны.

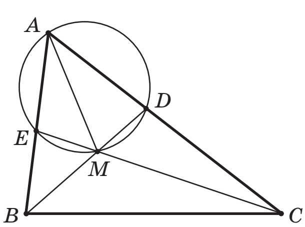


Рис. 11

Следующая задача — более сложный и красивый пример использования развитых идей.

Задача 4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, I_1, I_2, I_3 и I_4 — центры вписанных окружностей треугольников ABD, ABC, BCD и DAC соответственно. Доказать, что $I_1I_2I_3I_4$ — прямоугольник.

Решение этой задачи тоже основано на лемме 1. Применим ее к треугольникам ABD и ACD из условия задачи (рис. 12).

Получим:

$$\angle AI_1D = 90° + \frac{\angle ABD}{2}, \quad \angle AI_4D = 90° + \frac{\angle ACD}{2}.$$

Но углы ABD и ACD равны, как опирающиеся на одну и ту же дугу в окружности. Значит, согласно доказанной теореме точки A, I_1, I_4 и D лежат на одной окружности. Следовательно, можно выразить величину угла I_1I_4D через углы четырехугольника $ABCD$:

$$\angle I_1I_4D = 180° - \angle I_1AD = 180° - \frac{\angle BAD}{2}.$$

Аналогично получаем $\angle DI_4C = \angle DI_3C$, откуда

$$\angle I_3I_4D = 180° - \frac{\angle BCD}{2}.$$

Теперь находим угол $I_1I_4I_3$:

$$\angle I_1I_4I_3 = 360° - \angle I_1I_4D - \angle I_3I_4D =$$

$$= 360° - \left(180° - \frac{\angle BAD}{2}\right) - \left(180° - \frac{\angle BCD}{2}\right) =$$

$$= \frac{\angle BAD}{2} + \frac{\angle BCD}{2} = 90°,$$

так как сумма противоположных углов четырехугольника $ABCD$ равна $180°$. Таким образом же можно найти остальные углы четырехугольника $I_1I_2I_3I_4$.

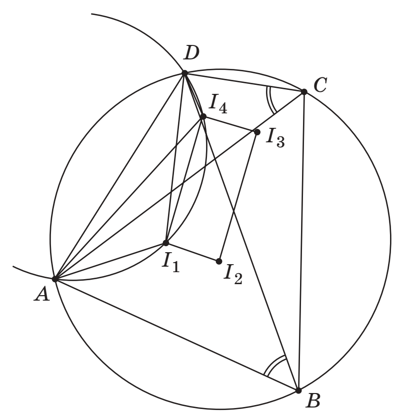


Рис. 12

Доказанное утверждение имеет несколько красивых следствий.

Задача 5. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Тогда сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и CDA равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники DAB и BCD.

Для доказательства нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть стороны треугольника ABC равны a, b и c (сторона a лежит напротив вершины A и т.д.). Тогда длины отрезков сторон треугольника от его вершин до точек касания с вписанной окружностью выражаются формулами:

$$x = \frac{a+b-c}{2}, \quad y = \frac{a-b+c}{2}, \quad z = \frac{-a+b+c}{2}$$

(рис. 13).

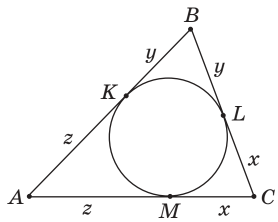


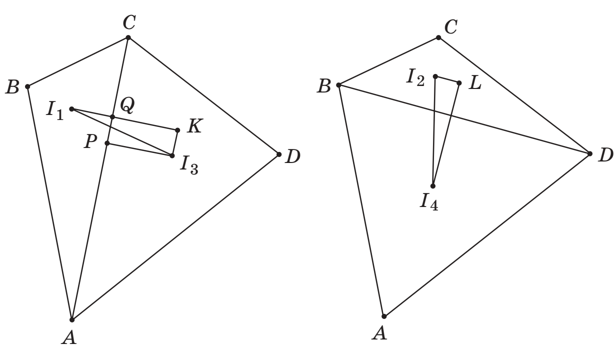
Рис. 13

Чтобы получить эти формулы, достаточно вспомнить, что отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны между собой. Поэтому можно составить систему уравнений

$$a = x + y, \quad b = x + z, \quad c = y + z,$$

из которой и следует результат.

Доказательство. Чтобы теперь доказать утверждение о суммах радиусов окружностей, опустим из центра I_1 окружности, вписанной в треугольник ABC, перпендикуляр I_1Q на диагональ AC четырехугольника $ABCD$, а через точку I_3 проведем прямую I_3K, параллельную AC (K — точка пересечения прямой с продолжением перпендикуляра I_1Q, рис. 14,*а*). Аналогичные построения проделаем для диагонали BD и центров I_2, I_4 (рис. 14,*б*). У полученных прямоугольных треугольников I_1I_3K и I_4I_2L равны гипотенузы (как диагонали прямоугольника $I_1I_2I_3I_4$). Найдем катет I_3K треугольника I_1I_3K (выразим его через стороны четырехугольника $ABCD$). Для этого заметим, что $I_3K = PQ$, где P, Q — основания перпендикуляров, опущенных из I_3 и I_1 на диагональ AC.



а) б)

Рис. 14

То есть P и Q — точки касания отрезка AC с окружностями, вписанными в треугольники ADC и ABC.

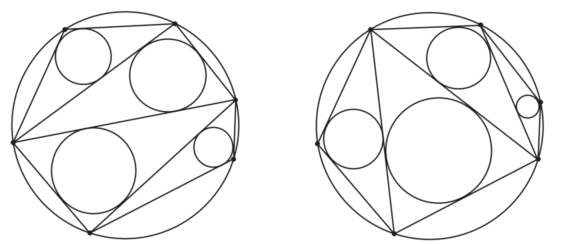
Согласно доказанному утверждению

$$PQ = |AQ - AP| = \left| \frac{AB + AC - BC}{2} - \frac{AC + AB - CD}{2} \right| =$$

$$= \frac{|AB - AD - BC + CD|}{2}.$$

Мы поставили знак модуля, чтобы формула оставалась верной и в случае иного расположения точек P и Q. Аналогичное вычисление показывает, что I_2L будет равно тому же самому выражению. Значит, $I_3K = I_2L$, следовательно, треугольники I_1I_3K и I_4I_2L равны. Поэтому $I_1K = I_4L$. Но эти отрезки равны суммам радиусов соответствующих вписанных кругов.

Следствие. Пусть $A_1A_2...A_n$ — вписанный многоугольник. Проведем $n - 3$ непересекающиеся диагонали этого многоугольника так, чтобы он оказался разбит на треугольники. Тогда сумма радиусов вписанных окружностей образовавшихся треугольников постоянна, то есть не зависит от выбора проведенных диагоналей (рис. 15, *а* и *б*).



а) б)

Рис. 15

Доказательство этого утверждения является несложным упражнением, основанным на только что доказанной теореме, и предоставляется читателю. Отметим кстати, что данное утверждение является примером так называемого *сангаку*, или японской храмовой геометрии, — набора геометрических утверждений, записанных, а чаще просто нарисованных на особых табличках, которые хранились в синтоистских храмах в качестве подношений местным японским божествам. Подробнее об этом специфическом виде геометрических знаний можно прочесть в статье: *Щетников А.* Японская храмовая геометрия// Математика, 2006, № 17.

Как мы видим, существование описанной окружности накладывает серьезные ограничения на четырехугольник. И таких дополнительных условий великое множество. Некоторые из них полезно использовать для решения задач, другие — просто красивы сами по себе.

Вот еще один пример использования признака вписанного четырехугольника.

Теорема 4. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник такой, что продолжения его противоположных сторон пересекаются. Тогда окружности, описанные около четырех треугольников, образовавшихся при пересечении продолжений сторон четырехугольника $ABCD$, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *точкой Микеля* четырехугольника $ABCD$.

Доказательство. Пусть для определенности P и Q — точки пересечения прямых AB с CD и BC с AD соответственно (B лежит между A и P, D — между A и Q, см. рис. 16). Требуется доказать, что окружности, описанные около треугольников APD, BPC, CQD и AQB, пересекаются в одной точке. Пусть M — точка пересечения окружностей, описанных около треугольников APD и AQB. Докажем, что две другие окружности проходят через M.

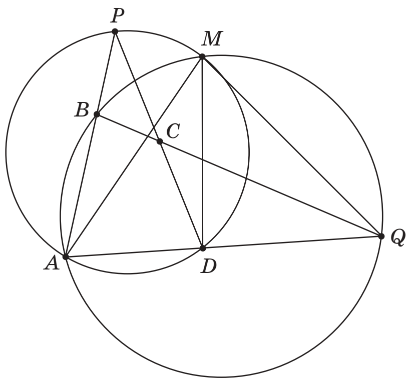


Рис. 16

Рассмотрим для этого треугольник BCP: угол ABC является внешним углом этого треугольника, следовательно, он равен сумме двух внутренних углов с ним не смежных: $\angle ABC = \angle BPC + \angle BCP$, или, так как углы DCQ и BCP равны как вертикальные,

$$\angle DCQ = \angle BCP = \angle ABC - \angle BPC.$$

Теперь заметим, что $\angle ABQ = \angle AMQ$, как опирающиеся на одну дугу окружности, описанной около треугольника AQB. Аналогично устанавливаем равенство углов APD и AMD. Следовательно,

$$\angle DMQ = \angle AMQ - \angle AMD =$$

$$\angle ABQ - \angle APD = \angle ABC - \angle BPC = \angle DCQ.$$

Таким образом, для точек D, C, M и Q выполнено условие первой части теоремы 3 (равенство (1)). Следовательно, они лежат на одной окружности. Так как через три точки D, C и Q можно провести единственную окружность, утверждение доказано. Аналогично получаем, что окружность, описанная около треугольника BCP, тоже проходит через точку M.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что точка пересечения высот остроугольного треугольника является центром окружности, вписанной в треугольник с вершинами в основаниях высот. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для тупоугольных треугольников.

2. На отрезке AB как на диаметре построена окружность. Через точку M на плоскости проведены прямые AM и BM, пересекающие окружность в точках K и L (отличных от A и B). Пусть N — точка пересечения прямых AL и BK. Найдите угол ANB, если $\angle AMB = \alpha$.

3. В некотором треугольнике точка пересечения высот лежит на одной окружности с основаниями двух биссектрис с вершинами, из которых выходят указанные биссектрисы. Найдите углы этого треугольника.

4. Докажите, что в любом треугольнике отношение длины любой стороны к синусу противоположного угла равно диаметру описанной окружности (обобщенная теорема синусов). Используйте это утверждение для доказательства теоремы 3.

5. Пусть точка N лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из N на стороны треугольника ABC (или их продолжения), лежат на одной прямой (эта прямая называется *прямой Симсона* точки N относительно треугольника ABC). Докажите также, что верно обратное утверждение: если основания перпендикуляров, опущенных из точки N на стороны треугольника ABC (или их продолжения), лежат на одной прямой, то точка N лежит на окружности, описанной около ABC.

6. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ (см. теорему 4) является вписанным, если и только если его точка Микеля M лежит на отрезке PQ.

7. Докажите, что центры окружностей, упомянутых в теореме 4, и точка Микеля M произвольного четырехугольника лежат на одной окружности.

8. Докажите, что площадь вписанного четырехугольника может быть найдена по

ФОТО НА КОНКУРС!

Не страшны нам даже дроби!
Автор: Е.Е. Воронова, школа-интернат, г. Липецк

формуле Брахмагупты: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$,

где a, b, c и d — стороны четырехугольника, а $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ — его полупериметр.

Указания к задачам для самостоятельного решения

1. Докажите, что углы, образованные стороной остроугольного треугольника и примыкающими к ней отрезками, соединяющими основания высот треугольника, равны между собой.

2. Заметьте, что точка N является точкой пересечения высот треугольника AMB.

3. Из условия задачи следует, что углы, образованные проведенными биссектрисами и сторонами, которые они пересекают, равны между собой и равны углу между высотами треугольника, проведенными к тем же сторонам. Теперь можно выразить все упомянутые углы через величины углов треугольника и решить получающиеся уравнения.

4. Проведите через одну из вершин треугольника диаметр описанной около этого треугольника окружности и соедините одну из оставшихся вершин треугольника с его окончанием. Теперь синус угла треугольника можно выразить через катет и гипотенузу получившегося прямоугольного треугольника.

5. Пусть K, L, M — основания перпендикуляров, опущенных из N на AB, BC и AC соответственно (рис. 17). Докажите, что угол KMA равен углу CML. Для этого воспользуйтесь тем, что, например, точки K, A, M и N лежат на одной окружности (Почему?), как и точки M, L, C и N и т.п.

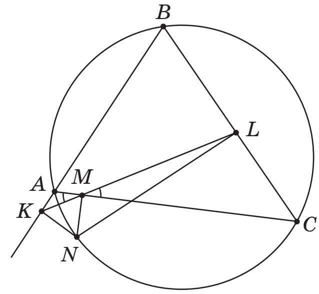


Рис. 17

6. Воспользуйтесь вычислениями углов, которые были проделаны при доказательстве теоремы 4 и покажите, что $\angle AMP + \angle AMQ = 180^\circ$, если и только если $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.

7. Докажите следующее вспомогательное утверждение.

Пусть точки A, B и C лежат на одной прямой, точка M — вне этой прямой. Тогда центры окружностей, описанных около треугольников ABM, BCM и ACM, и точка M лежат на одной окружности.

Для этого воспользуйтесь теоремой, обратной к теореме о прямой Симсона (задача 5).

8. Используйте теорему косинусов, чтобы выразить величину косинуса одного из углов четырехугольника через стороны, задающие этот угол, и диагональ. Так как противоположный угол вписанного четырехугольника дает в сумме с данным 180°, то получаем возможность исключить диагональ из формулы.

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации НШ-8004.2006.2

ПОЛЕЗНЫЕ СОВЕТЫ

Г. КОЛУПАЕВА
с. Чоя, Республика Алтай

Урок защиты домашнего задания

Чтобы научиться решать задачи — их надо решать. За три недели до урока защиты домашнего задания тексты задач вывешиваются в классе. Это нестандартные, серьезные и красивые задачи, при решении которых учащиеся должны применить все свои знания, умение логически мыслить. Через неделю после этого назначаются «солисты» — те учащиеся, которым предстоит защищать свои решения (часто по одной задаче «солирует» несколько ребят). Во время опроса класс следит за грамотностью изложения, думает над различными способами решения задачи, выбирает наилучший. Каждая задача решается несколькими способами, любой ученик вправе предложить свой способ решения, а класс — выбрать лучший. Все ученики, принявшие участие, получают отметку. В ходе защиты решений задач приветствуется и поощряется активная позиция всех присутствующих на уроке: задаются вопросы выступающим, подмечаются ошибки и оговорки «солистов», выслушиваются другие подходы к решению.

ПОДПИСКА на II полугодие 2007 г.

Подписаться на газету «Математика» можно в любом почтовом отделении России по каталогу «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать»

При подписке на 6 месяцев подарок: три выпуска Библиотечки «Первого сентября» (серия «Математика»)

Ф. СП-1

Министерство связи Российской Федерации "Роспечать"

32030
(индекс издания)

Математика–Первое сентября

наименование издания	Количество комплектов	

на ________ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда ____________ ____________
(почтовый индекс) (адрес)

Кому ____________
(фамилия, инициалы)

ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА

ПВ	место	ли-тер

на газету **32030**
(индекс издания)

Математика–Первое сентября
(наименование издания)

Стои-мость	подписки	____________ руб.	Количество комплек-тов	
	пере-адресовки	____________ руб.		

на ________ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда ____________ ____________
(почтовый индекс) (адрес)

Кому ____________
(фамилия, инициалы)

Шеф-редактор С. Островский
Главный редактор Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель ООО «Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя: ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (499)249 3138
Отдел рекламы: (499)249 9870
Редакция газеты «Математика»: **тел.:** (499)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru