#16
1—31 октября 2007 г.
Электронный информационный спутник газеты «Математика»

Поздравляем победителей конкурса «Учитель года России»!

А. Мехед

Д. Гущин

Впервые в истории конкурса его абсолютными победителями стали сразу два человека – и оба учителя математики! Это Анна Мехед (СШ № 2030, Москва) и (Петергофская гимназия императора Александра II, Санкт-Петербург).

Мы рады за наших коллег, которые доказали, что уроки математики могут быть не только полезными, но еще и интересными. Надеемся, что двойная победа учителей математики свидетельствует о том, что наше общество приходит к пониманию значимости математического знания в современной жизни.

А победителей приглашаем к сотрудничеству. Читателям газеты будет интересно познакомиться с их опытом работы и, конечно, участия в конкурсе. Хороших учителей математики у нас много!

Региональные координаторы — за работу!

Страна у нас большая настолько, что когда в Москве рабочий день начинается, то на Чукотке он заканчивается. Живем в «противофазе», как сказали бы физики. Но пространство наше образовательное едино, и единство это надо поддерживать и развивать (и не только с помощью единого госэкзамена). Хочется думать, что наша с вами газета тоже является таким объединяющим началом. Очень интересно получать материалы, как говорится, из разных уголков страны, они дают представление о работе учителя. Но хотелось бы видеть и региональную «картинку»: чем живет регион, какие в нем идут процессы, эксперименты, проводятся мероприятия. И чтобы получать более полную информацию, мы решили укрепить наши ряды внештатными региональными координаторами — специалистами системы образования, хорошо информированными о том, что происходит в регионе. Первые плоды уже есть. Номер, посвященный программам элективных курсов, сделан в основном на материалах, присланных из Санкт-Петербурга, Саратова и Хабаровска.

Свое согласие сотрудничать с газетой дали: И. Зудилова (Хабаровский край), Е. Морозова (Челябинская обл.), Е. Лукичева (Санкт-Петербург), В. Маркова (Кировская обл.), Е. Семенко (Краснодарский край), З. Гребнева (Волгоградская обл.), О. Вертелецкая (Белгородская обл.), Т. Лупорева (Липецкая обл.), Е. Эргле (Саратовская обл.), Т. Ворошко (Чукотский АО), С. Ульзутуева (Читинская обл.), Н. Жаркова (Смоленская обл.).

Приглашаем к сотрудничеству специалистов и из других регионов. Будем только рады «освоению» все новых и новых территорий.

Л. Рослова

В ЭТОМ ВЫПУСКЕ

Мнения
Взгляд с Филдсовских высот .... 2—3

Предлагаю коллегам
Л. Кузнецова
Практико-ориентированные задачи при изучении тригонометрии................. 4—8

Открытый урок
Л. Парфенова
Урок-пресс-конференция «Вычисление площади круга» .... 9—10

Олимпиады, конкурсы, турниры
А. Обрубов, Т. Струков, Е. Новодворская, П. Чулков, Е. Шапарин
XVI Турнир Архимеда. Итоги заочного конкурса........ 11—13

Задача номера
Два дошкольника 14

ВНИМАНИЕ, АНОНС!

Тема № 21: Новые задачи «на проценты»
Тема, связанная с изучением процентов, стара, как мир. Но новая жизнь дает новые задач, учителя и методисты ищут новые методические подходы к их решению

Тема № 22: К юбилею Я.И. Перельмана
Замечательный российский популяризатор науки оставил после себя множество книг, которые не потеряли своего значения до настоящего времени. Учителя рассказывают о том, как они используют наследие Перельмана в своей работе

Читайте в № 21
Соревнование по профессиональным качествам: Второй заочный творческий конкурс учителей математики
В Москве прошел очередной очный творческий конкурс учителей математики, в котором приняли участие и победители заочного тура, проведенного газетой весной этого года. Подведены итоги и названы победители. Можно изучить решения

Взгляд с Филдсовских высот

На вопросы главного редактора газеты «Математика» **Л.О. Рословой**
отвечает лауреат Филдсовской премии **Андрей Окуньков**

Каждый день перед глазами учителя — мальчики и девочки, сидящие за партами. Хорошо успевающие и не очень, ответственные и лентяи, шаловливые и спокойные. Особенность учительской работы такова, что он видит их достоинства и недостатки лишь в зародыше, ему не дано сегодня знать, кем они станут во взрослой жизни, какую выберут профессию, чем будут заниматься. Он узнáет это лишь со временем, или не узнáет вовсе, если не будет обратной связи. Но заглянуть в будущее хотелось бы. Лишь с опытом, следя за тем, как складываются судьбы его учеников, учитель может научиться предугадывать, как будут развиваться их способности, кем они станут. Помочь учителям в этом могут и бывшие выпускники, которые достигли в своем деле значительных высот.

Вот почему мне захотелось попросить поделиться воспоминаниями о школьной жизни Андрея Окунькова, лауреата Филдсовской премии 2006 года. Проясняют ли они что в этой непростой проблеме, судить вам. А я для себя лишний раз убедилась, что не так просто разложить человеческую судьбу по заданному базису. С одной стороны, может показаться, что всем правит случай, с другой — есть ощущение, что человека ведет по жизни Судьба.

Мы встретились с Андреем на Общемосковском математическом семинаре «Глобус», который проходит в Независимом московском университете и является, наряду с общеинститутским семинаром Математического института РАН и заседанием Московского математического общества в МГУ, одним из самых представительных общематематических семинаров Москвы. На его заседаниях регулярно выступают ведущие математики России и мира, в этот раз прочитать лекцию пригласили А. Окунькова.

Л.Р. Андрей, я знаю, что Вы москвич, окончили московскую школу. Что это за школа? Физико-математическая? Знаменита ли она чем-либо?

А.О. Я учился в средней школе № 204. Школа наша была очень хорошая, хоть, может, и не знаменитая. Особенное было в ней то, что она состояла при Институте технических средств обучения, так что физических приборов да химических установок у нас были полны шкафы. Что, возможно, и привило мне любовь к наблюдаемой природе и к наглядности вообще. Хотя в школе мне больше нравились гуманитарные предметы, в особенности языки и литература. (По тому, как я изъясняюсь сейчас, об этом, пожалуй, трудно догадаться – уж больно иссушает родную речь язык современной математики.)

Л.Р. Как Вам училось? Насколько успешно? Каковы Ваши общие впечатления о школьной жизни? И не мешала ли школа развиваться?

А.О. Учился я неплохо: получил, например, серебряную медаль. Но в Вашем вопросе мне слышится вопрос о правильной пропорции между личной свободой и, так скажем, заботой, а порой и принуждением в воспитании. Конечно, принуждения в те годы хватало, и я рад, что мои дети растут в более раскованной атмосфере. Где же она, оптимальная пропорция, я гадать не стану, да и индивидуальна она. Знаю только, что обе крайности плохи. Приходилось, например, встречать людей, считающих, что зазубривание таблицы умножения есть насилие над личностью ученика. А в результате их, с позволения сказать, ученики не в силах найти 20% от ста рублей, и ими можно манипулировать как угодно.

Л.Р. А как математика вошла в Вашу жизнь? Когда был сделан выбор профессии? Кто оказал влияние?

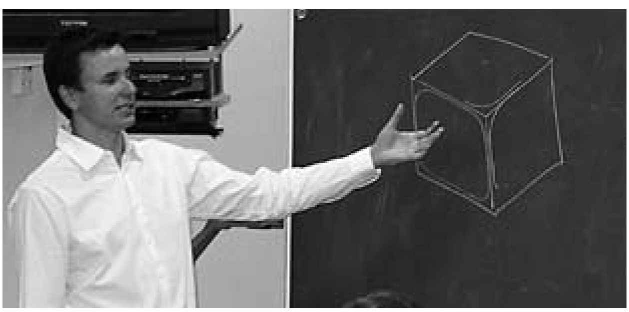
А.О. В старших классах я учился в Экономико-математической школе (ЭМШ), которая вот уже почти 40 лет работает на энтузиазме студентов и преподавателей экономфака МГУ. Первоначально меня интересовала экономика, а математика была средством ее изучения. Причем средством, оставлявшим значительную свободу творческой мысли, что в те времена было ой как немаловажно. ЭМШ я обязан очень многим: это было и первое знакомство с настоящей наукой, и место где я встретил многих своих друзей, включая мою супругу Инну. И только через несколько лет, после двух курсов МГУ, службы в армии, и не без помощи таких преподавателей кафедры матметодов, как И.А. Кострикин, интерес к математике пересилил во мне интерес к экономике. И тогда я перевелся на мехмат.

Л.Р. Насколько вообще в школьные годы что-то для Вас определилось в отношении математики?

А.О. Математику я любил, но скорее не саму по себе, а как ключ к постижению других истин. Может быть, именно поэтому из всех разделов математики меня больше всего привлекает математическая физика.

Л.Р. Участвовали ли Вы в олимпиадах?

А.О. Да, и по очень разным предметам. Успешнее всего по экономике и немецкому языку. А однажды я участвовал в районной олимпиаде по музыке. Музыку я очень люблю, но никакими способностями к ней, увы, не наделен. К счастью, все, что нас попросили там сделать, это написать сочинение о музыке, с чем я, помнится, неплохо справился (в подтверждение чего у меня где-то хранится грамота).



В районных математических олимпиадах я тоже успешно участвовал, а вот где и когда проходят городские, я так и не разобрался. Не исключено, что подсознательно боялся наших знаменитых «олимпиадных» задач. Кстати, и по сей день мне порой не по себе от математики, требующей поистине сверхчеловеческой хитрости. Мне больше по душе простые аргументы. После них, конечно, не остается никакой полупрозрачной магической пелены, а одно лишь обыденное сознание того, что вопрос понят и тем самым исчерпан. Это, однако, вопрос вкуса, и далеко не все со мной согласятся.

Л.Р. Были ли в школе какие-то предпочтения: алгебра или геометрия?

А.О. Когда я смотрю на наш тогдашний курс математики сегодняшними глазами, бросается в глаза, насколько формален, даже по сравнению с алгеброй, был наш курс геометрии. Видимо, именно в курсе геометрии нам надлежало выучить формальную структуру математики, с ее определениями, аксиомами, теоремами и проч. Все это, конечно, очень важно, но столь же важной мне представляется наглядность геометрии, которая при этом несколько отступила на второй план.

Л.Р. Слушая Ваше выступление на семинаре, я обратила внимание, насколько естественно Вы переходите с одного математического языка на другой: вероятность, геометрия, алгебра, анализ. Было ощущение единства математики. В школе для ученика, как правило, существуют два предмета: алгебра и геометрия, и прямая на уроке геометрии и прямая на уроке алгебры — две большие разницы. «Перенести» знания — это что-то нарушить, перейти какую-то запретную черту. Нужно ли, на Ваш взгляд, учить ребят переходить с одного математического языка на другой? Развивать какие-то другие качества, необходимые математику?

А.О. Математика, безусловно, едина, и в преподавании математики надо обязательно к этому единству стремиться. Да и к другим наукам математика куда ближе, чем кажется при чтении большинства учебников. Вообще, в жизни человека, прослушавшего современные курсы математики, часто бывают открытия своего рода археологические, когда оказывается, что та или иная формула, выученная им на чисто эстетической основе, вдруг описывает нечто знакомое из реального мира. Наши предшественники, разумеется, шли ровно в противоположном направлении, но в процессе абстрагирования память об этом зачастую была утрачена.

А между тем именно в способности решать реальные практические задачи и есть главная сила и польза математики. Если бы выпускники средних школ только догадывались о том, какое громадное количество математики требуется где-то за кадром для поддержания их нормальной жизни, положение математики в современном обществе было бы менее шатким.

Л.Р. Вы — «продукт» российской школы, российского математического образования. Чувствуете ли Вы это, работая в Америке, общаясь с математиками из других стран?

А.О. Я очень благодарен судьбе, что получил образование в Москве. Американское образование, насколько я могу судить о нем по собственному опыту преподавания в университетах, на мой вкус, слишком абстрактно и разрозненно. Ничто не мешает получить диплом математика, не просидев за всю жизнь и 45 минут на уроке физики или не зная, что такое комплексное число. Конечно, одаренные люди есть везде, и из американских университетов вышло множество первоклассных математиков. Наверно, их картина мира сильно отличается от моей, и они бы столь же остро подметили разные недостатки и пробелы в моем образовании.

Л.Р. Скоро День учителя. Что Вы можете пожелать учителям математики?

А.О. Для успеха в том великом деле, которое делают учителя математики, хочется пожелать им много ярких учеников, много сил и побольше понимания со стороны нашего общества.

А ещё хочу воспользоваться возможностью поздравить с этим праздником моих учителей. Надеюсь, что мои поздравления найдут их в добром здравии и бодром настроении.

Прошлой осенью, когда вышел номер, в котором мы поздравляли Андрея Окунькова с присуждением премии, в редакцию позвонила его учительница математики Т.Ф. Галайко. На мой вопрос, что испытывает учитель, когда узнает о больших успехах своего ученика, она ответила: «Счастье. Счастье, что судьба подарила мне такую встречу, ведь учителя делают его ученики».

Л. КУЗНЕЦОВА,
с. Безопасное, Ставропольский край

Практико-ориентированные задачи при изучении тригонометрии

Вступительная беседа

Тригонометрия — математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника. Тригонометрия дает методы решения реальных задач, возникающих в физике, механике, астрономии, геодезии, картографии и других науках. Тригонометрия в своем развитии прошла две стадии. Изначально тригонометрия возникла в античном мире и развивалась в тесной связи с астрономией. Тригонометрические знания были нужны для определения положения небесных светил, составления карты звездного неба, предсказания солнечных затмений, расчетов траекторий комет и т.п. В средневековое время она развивалась благодаря потребностям географии, геодезии, военного дела. Итак, тригонометрия помогала определять элементы треугольников (и многоугольников), то есть применялась к решению геометрических задач. В 8–9-х классах вы знакомились с первой стадией — тригонометрией острого угла. (*Вспомнить определение синуса, косинуса, тангенса острого угла*.)

Второй этап развития тригонометрии берет начало в трудах Франсуа Виета (1540–1603) и завершается созданием аналитической теории тригонометрических функций в школе академика Леонарда Эйлера (1707–1783). Тригонометрические функции применялись к решению задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов (звуковой, световой и электромагнитной волны), для изучения переменного электрического тока и т.д. В старших классах мы начнем изучать вторую стадию — тригонометрические функции любого числового аргумента. Таким образом, тригонометрия, возникшая как наука о решении треугольников, со временем развилась в науку о тригонометрических функциях.

В чем состоит различие между этими двумя стадиями? Например, в том, что на одни и те же соотношения смотрели по-разному. Так, для первого периода развития тригонометрии характерно понимание выражения $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ как зависимости между площадями квадратов, построенных на сторонах переменного прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1. А для второго периода это соотношение отражает сложение двух колебательных движений с происходящей при этом интерференцией (сложение в пространстве двух или нескольких волн, при котором в разных точках получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны, рис. 1).

Итак, мы коснулись понятия тригонометрической функции. Вспомним, что такое функция? Понятие функции начиная с XVII в. является одним из важнейших математических и общенаучных понятий и выражает зависимость между переменными величинами. С функциями прямой и обратной пропорциональной зависимости вы знакомились в 7-м классе. (*Вспомнить примеры*.)

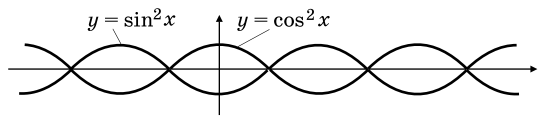


Рис. 1

Определение. Пусть задано некоторое числовое множество X и указан закон (правило), по которому каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие единственное число y из множества Y. Тогда говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X.

Например:

Множество X	Множество Y	Множество X	Множество Y
Длина ребра куба (x)	Объем куба (x^3)	Острый угол (A)	Тангенс угла ($\text{tg}\,A$)
1 см	1 см^3	30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
2 см	8 см^3	45°	1
3 см	27 см^3	60°	$\sqrt{3}$

Таким образом, объем куба есть функция длины ребра куба, тангенс острого угла есть функция этого угла.

Тема: «Длина дуги окружности»

Современные инженеры и техники, создающие различные машины и механизмы, в которых происходит преобразование круговых движений в прямолинейные и обратно, должны знать теорию тригонометрических функций любых углов и дуг, меньших или больших 90°, 180°, 360°. Для начала рассмотрим понятие длины дуги окружности.

Задача 1. Вечером автобус на повороте радиусом закругления $R = 100$ м освещает дорогу светом, расходящимся от фар, под углом $\alpha \approx 2°$ к направлению движения. Какова длина дороги, обозримой водителем на повороте?

Решение. Пусть автомобиль находится в точке A (рис. 2). Тогда фары освещают дугу AB, длину которой l и требуется найти.

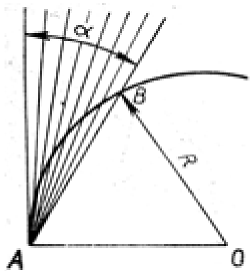


Рис. 2

Соединим точки A и B с центром окружности O. Угол α образован касательной к окружности (так как направление движения всегда совпадает с касательной к траектории) и хордой. Поэтому его величина равна половине угловой величины дуги AB, следовательно, угловая величина дуги AB равна 4°, откуда

$$l=\frac{2\pi R}{360}\cdot 4\approx 7 \text{ м.}$$

Тема: «Радианное измерение дуг и углов»

Существуют различные системы измерения дуг и углов. Использование той или иной системы зависит от вида практики.

Механик чаще измеряет углы, образующиеся при вращательных движениях, его интересует число оборотов в 1 минуту или 1 секунду. Так, говорят, что вал рассчитан на 7000 оборотов в минуту. Всем знакомо выражение «обороты двигателя автомобиля».

Астроном же часто измеряет углы, образующиеся при вращении Земли вокруг оси, в часовых единицах; так как за 24 часа Земля поворачивается на 360°, то за 1^h (то есть за 1 час) она повернется на 15°. Так, говорят, что долгота Москвы $2^h20'28''$, что равно $37°37'$.

Землемер измеряет углы в градусных единицах, один градус — $\frac{1}{90}$ доля прямого угла.

Наиболее удобной мерой измерения дуг и углов, связанных с вращательными движениями, оказалась мера *радианная*, которая вошла в науку через замечательные труды нашего петербургского академика Л. Эйлера. Назовем радианом дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности. При радианном измерении углов упрощается ряд формул.

Например, формулы для длины дуги l окружности и площади S сектора круга, где r — радиус, n — градусная мера соответствующей дуги $l=\frac{\pi rn}{180}$ и $S=\frac{\pi r^2 n}{360}$; в радианной мере α соответствующей дуги имеют более простой вид:

$$l=\alpha r \text{ и } S=\frac{\alpha r^2}{2}. \qquad (*)$$

Задача 2. Маховик трактора имеет в диаметре 0,5 м и делает 1980 оборотов в минуту.

а) Выразите в радианной мере угловую скорость φ маховика.

б) Выразите в радианах, а затем в метрах длину дуги l, описанную за t часов точкой, взятой на ободе маховика.

в) Найдите линейную скорость v_l этой точки.

Решение. а) $v_\varphi=\frac{2\pi\cdot 0,5}{60}\cdot 1980\pi$ (рад /ч).

б) $l=33\pi t=103,62t$ (м).

в) $v_l=103,62$ (м/ч).

Задача 3. Конец минутной стрелки часов движется по окружности радиуса $R\approx 10$ см. Какой путь проходит конец стрелки за 15 мин?

Решение. За 15 мин стрелка поворачивается на угол, равный $\frac{\pi}{2}$ рад. По формуле (*) находим:

$$l=\frac{\pi}{2}\cdot R=\frac{3,14}{2}\cdot 10 \text{ см}\approx 15,7 \text{ см.}$$

Тема: «Координатная окружность»

Тригонометрические функции выражают законы круговых и периодических движений. Клапаны парораспределительного механизма паровой машины периодически открываются и закрываются, поршень машины, подобно маятнику часов, периодически повторяет свое прямолинейное движение от одного своего крайнего положения к другому и обратно, маховик и коленчатый вал совершают повторяющиеся круговые движения и т.д.

Но не только механические движения могут иметь периодический характер. Таким свойством обладают многие световые, звуковые и электромагнитные явления, а также целый ряд явлений, наблюдаемых нами в самой природе (движение планет, смена дня и ночи, смена времен года, приливы и отливы и т.п.) и в организме человека (работа сердца).

Периодические процессы и явления изучаются физиками, механиками, астрономами, математиками и другими учеными. Закономерности тех или иных периодических явлений ученые записывают в виде функций, а затем, исследуя эти функции, раскрывают внутреннее содержание таких явлений и указывают пути практического использования их на благо человека. Изучение функций, описывающих периодические процессы, значительно облегчает установление соответствия между действительными числами и точками окружности.

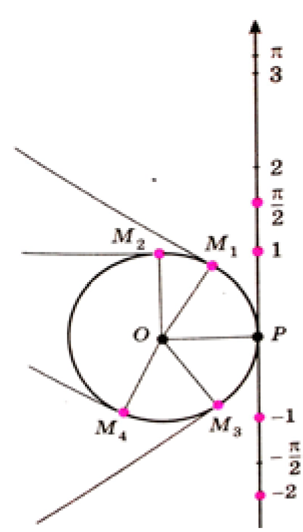


Рис. 3

Пусть вертикальная прямая касается в точке P окружности с центром O радиуса 1 (рис. 3). Будем считать эту прямую числовой осью с началом в точке P, а положительным направлением на прямой — направление вверх. За единицу длины на числовой оси возьмем радиус окружности. Отметим на прямой несколько точек ± 1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm\pi$. Вообразив эту прямую в виде нерастяжимой нити, закрепленной на окружности в точке P, будем мысленно наматывать ее на окружность. При этом точки числовой прямой с координатами, например, 1, $\frac{\pi}{2}$, -1, -2 перейдут соответственно в точки окружности M_1, M_2, M_3, M_4 такие, что длина дуги PM_1 равна 1, длина дуги PM_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т.д. Таким образом, *каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности*.

Задача 4. Колесо автомобиля вращается с угловой скоростью π рад/с. Найдите число оборотов:

а) за 25 с; б) за 1 мин 10 с.

Ответ: а) 12,5 об.; б) 35 об.

Задача 5. Колесо трактора вращается с угловой скоростью $\frac{\pi}{6}$ рад/с. На какой угол оно повернется:

а) за 30 с; б) за 1 мин 15 с; в) за 5 мин 40 с?

Ответ: а) 900°; б) 2250°; в) 10 200°.

Задача 6. В автомобиле ЗИЛ-130 в коробке перемены передач при полном обороте одной шестерни другая шестерня совершает два оборота в противоположном направлении. На какой угол повернется второе колесо, если первое повернется:

а) на 300°; б) на 720°; в) на 2007°?

Ответ: а) –600°; б) –1440°; в) –4014°.

Тема: «Функции синус и косинус»

Рассмотрим более подробно несколько периодических процессов, встречающихся в технической практике. Возьмем простейшие механизмы, где круговое движение преобразуется в прямолинейное. На основе таких механизмов работают многие машины и станки.

Насаженное на ось O колесо K соединено посредством пальца M с рамкой N (рис. 4). При вращении колеса вокруг его оси палец M совершает круговое движение, увлекая за собой рамку; последняя скользит вдоль направляющих ее станин F и совершает колебательное периодическое движение.

Если рамку N соединить посредством штока E с какой-нибудь деталью (например, с поршнем насоса), то последняя будет совершать такое же движение, которое совершает рамка, то есть прямолинейное [2].

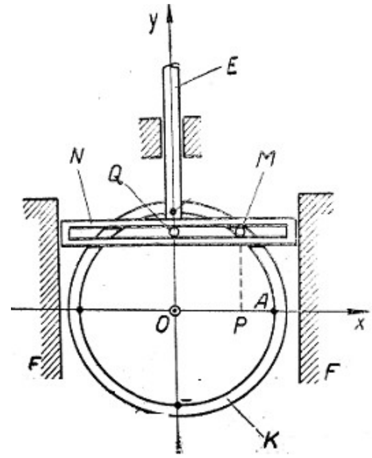


Рис. 4

Задача 7. Пусть колесо вращается равномерно против часовой стрелки, делая в 40 с полный оборот. Тогда угловая скорость вращения $\omega = \frac{\pi}{20}$ рад/с, следовательно, палец M опишет за t с дугу в $\frac{\pi}{20}t$ рад. Найти расстояние OQ, пройденное штоком за 5 с.

Решение. Изученная ранее числовая окружность является математической моделью рассматриваемого процесса. Понятно, что в каждый момент времени t расстояние рамки от оси абсцисс будет равно расстоянию пальца M от этой оси, то есть ординате точки M. Вспомнив, каким именно образом связана с осями координат числовая окружность, можно считать, что точка M движется по окружности, описывая ее в течение 20 с. Задача сводится к отысканию катета MP прямоугольного треугольника OPM (рис. 5). Используя данные, находим: $\angle MOP = \varphi = \frac{\pi}{4}$, тогда $MP = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. При движении колеса меняется положение точки $M(\varphi)$, а вместе с ней изменяется и ее ордината $y = OQ = MP = \sin\varphi$. Мы имеем две переменные величины φ и y, причем последняя находится в зависимости от первой, а именно: каждому значению величины φ соответствует определенное значение величины y. Таким образом, функция $\sin\varphi$ ставит в соответствие числу φ ординату точки $\sin\varphi$.

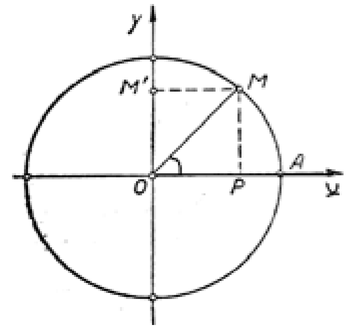


Рис. 5

Рассмотренная нами задача изучения одного из простейших механизмов привела нас к необходимости отыскания и изучения функции синус.

Следующая задача аналогичным образом приводит учащихся к понятию функции косинус.

Задача 8. Рассмотрим привод колес паровоза (рис. 6). Кривошип AB длиной r связан с ползуном C с помощью шатуна BC. При равномерном вращении кривошипа со скоростью ω ползун совершает поступательное движение в корпусе. Найти расстояние, на которое продвинется ползун в момент времени t. В начальный момент времени положение кривошипа совпадает с положительным направление оси OX.

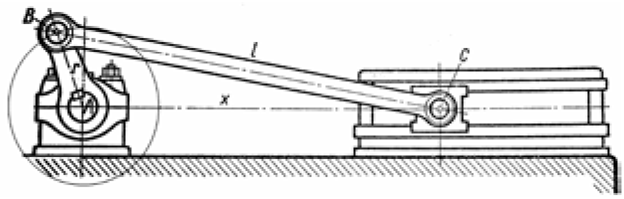


Рис. 6

Решение. В момент времени t кривошип образует с горизонтальным направлением угол $\alpha = \omega t$. Задача сводится к отысканию отрезка PA (см. рис. 5), длина которого равна $r - OP$. Из треугольника OMP: $OP = r\cos\alpha$, тогда $PA = r(1 - \cos\alpha)$.

Всякое движение, подобное рассмотренным выше, в физике называется *простым гармоническим колебанием*, задаваемым формулами

$$y = A\cos(\omega x + \varphi) \text{ или } y = A\sin(\omega x + \varphi).$$

Здесь A — амплитуда, ω — частота, φ — начальная фаза колебаний. Изучение колебательных процессов имеет исключительно важное значение, так как по их законам совершаются движения многих деталей различных механизмов, машин и станков, а также протекают многие явления в области электричества, света и звука.

Тема: «Графики тригонометрических функций»

После построения с учащимися графиков, полезно привести следующие примеры.

1. Если рулончик бумаги разрезать наискось и развернуть его, то край бумаги окажется разрезанным по синусоиде.

2. Хлыст при ударе совершает движение по синусоиде, при этом вся сила удара концентрируется на его конце.

3. На рисунке 7 изображен математический маятник. Зависимость координаты его конца от времени определяется тригонометрической функцией — синусом или косинусом — $x(t) = x_0\cos\omega t$, где угловая частота ω определяется длиной маятника $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, а x_0 — начальное отклонение.

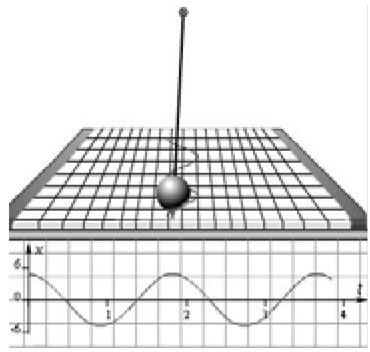


Рис. 7

4. Колебания в электрической цепи происходят по закону синуса или косинуса.

Можно предложить учащимся творческое **домашнее задание** практической направленности для успешного усвоения данной темы.

Мальчикам. Изготовить из картона модель колена водосточной или вытяжной трубы, как показано на рисунке 8. Для этого необходимо взять прямоугольный лист шириной $l = 2\pi R$, где R — радиус перпендикулярного сечения трубы, и на его основании построить синусоиду $y = R\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin x$. Если обе части колена одного радиуса, то $\alpha = 45°$, тогда $y = R\sin x$.

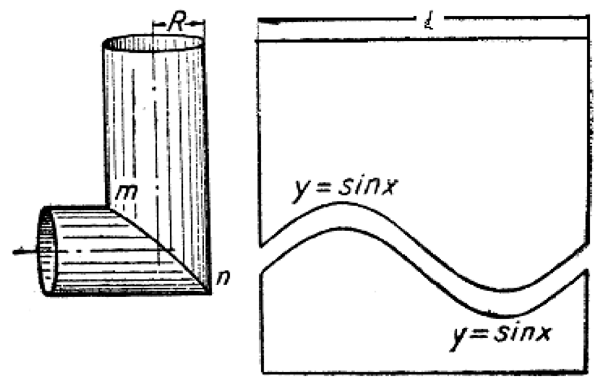


Рис. 8

Девочкам. Изготовить выкройки верхней части рукава и проймы.

Задача 9. На уроках физкультуры при метании малого мяча можно рассчитать дальность его полета по формуле

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

где α — угол вылета, v_0 — начальная скорость. Пусть

$$v_0 = 4\ \text{м/с},\ g = 9{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Постройте график функции $s = s(\alpha)$. При каком значении α дальность полета будет максимальной?

Тема: «Тригонометрические уравнения и неравенства»

Задача 10. Рассмотрим физическую задачу о преломлении светового луча при переходе из одной среды в другую [2]. Коэффициент преломления n равен отношению $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$, где α_1 — угол падения луча на границу сред, а α_2 — угол отклонения (рис. 9).

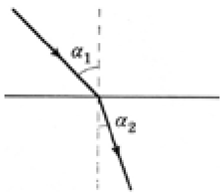


Рис. 9

При конструировании оптических приборов приходится решать такие задачи:

Как надо направить луч на границу двух сред, чтобы угол падения луча превышал угол преломления на данную величину?

Если $\alpha_1 > \alpha_2$ на $\alpha°$, то отыскание искомого угла падения x сводится к решению уравнения

$$\frac{\sin x}{\sin(x-\alpha)}=n, \qquad (1)$$

которое невозможно решить без знаний формул сложения тригонометрических функций.

Решение.

$$\sin(x-\alpha)=\cos\alpha\sin x-\sin\alpha\cos x.$$

Следовательно, уравнение (1) перепишется так:

$$\sin x=n(\cos\alpha\sin x-\sin\alpha\cos x)$$

или

$$\sin x\cdot(1-n\cos\alpha)=-n\sin\alpha\cdot\cos x,$$

откуда

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-n\sin\alpha}{1-n\cos\alpha} \text{ или } \operatorname{tg} x=\frac{n\sin\alpha}{n\cos\alpha-1}.$$

Если, например, положить $\alpha = 10°$ и взять коэффициент преломления воды $n = 1{,}33$, то будем иметь:

$$\operatorname{tg} x=\frac{1{,}33\cdot\sin 10°}{1{,}33\cdot\cos 10°-1}\approx\frac{1{,}33\cdot 0{,}1736}{1{,}33\cdot 0{,}9848-1}\approx 0{,}745,$$

$$x = 36°40'.$$

Задача 11. Для определения угла подъема школьной лестницы учащиеся могут измерить ширину (a) и высоту (b) одной ступеньки. Затем найти искомую величину угла из уравнения $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{b}{a}$.

Задача 12. Определить угол подъема автомобильной дороги в селе Московском в направлении от села Безопасного в г. Ставрополь, если она поднимается на 1 м каждые 4,8 м пути.

Ответ: $\alpha \approx 11{,}46°$.

Задача 13. В г. Ставрополь на расстоянии 432 м от перекрестка улиц Партизанская и Тельмана проходит улица Ессентукская (фрагмент карты г. Ставрополя — рис. 10). Ее часть, равная 160 м, соединяет две пересекающиеся улицы по кратчайшему пути. Определите угол пересечения следующих улиц:

а) ул. Партизанская и ул. Ессентукская;

б) ул. Партизанская и ул. Тельмана.

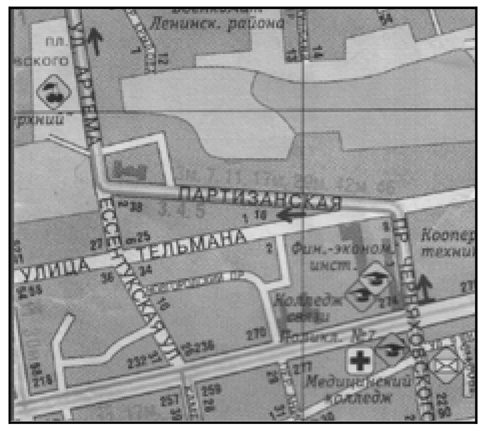


Рис. 10

Ответ: а) $\alpha \approx 20°$. б) $\beta \approx 70°$

Задача 14. Пусть имеется функция $I = 10\sin(50t + 1)$, где I — сила переменного тока. Определить такие моменты времени t, когда сила тока I равна 2 амперам [2].

Решение. Условие задачи записываем уравнением

$$10\sin(50t+1)=2,\ \sin(50t+1)=0{,}2,$$
$$50t+1=(-1)^n\arcsin 0{,}2+\pi n,\ n\in\mathbf{Z};$$

$$\begin{cases}50t_1+1=0{,}2+2\pi k,\\ 50t_2+1=-0{,}2+\pi(2k+1),\ k\in\mathbf{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t_1\approx-0{,}016+0{,}04\pi k,\\ t_2\approx-0{,}024+0{,}02\pi(2k+1),\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Литература

1. *Алимов Ш.А.* и др. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2004.

2. *Андронов И.К., Окунев А.К.* Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач. — М.: Просвещение, 1967.

3. *Петров В.А.* Преподавание математики в сельской школе: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1986.

4. *Поличка А.Е.* Преобразование тригонометрических выражений/Хабаровская краевая информационная сеть, 2005–2007. http://abc.edu-net.ru/m00410

5. Открытый колледж/Физикон, 2000–2007. http://www.college.ru/mathematics/courses/function/content/models

Л. ПАРФЕНОВА,
п/о Игнатьевское, Архангельская обл.

Урок – пресс-конференция «Вычисление площади круга»

Нередко у учеников складывается представление, что понятие площади связано только с такими фигурами, как квадрат, треугольник, параллелограмм, круг. И когда нужно найти площадь нестандартной фигуры, да еще провести для этого необходимые измерения, то многие ученики испытывают затруднения. Очень важно показать на уроках практическую направленность изучаемого материала, чтобы учащиеся могли применить свои знания при решении каких-то житейских вопросов. Задания такого уровня развивают творческое мышление учеников, формируют их интерес к математике.

Оборудование: линейки, транспортиры, калькуляторы, таблицы Брадиса, плакаты, иллюстрирующие условия задач, журналы «Домовенок», «Мои любимые цветы», раздаточный материал.

Форма работы: групповая.

В игре принимают участие две «лаборатории». Роль руководителя пресс-конференции и корреспондентов играет учитель.

Ход урока

I. Вступление

Учитель. Сегодня наш класс — центр вычисления площадей различных геометрических фигур. Вы — сотрудники двух лабораторий этого центра. Мы с вами вывели формулы для вычисления площадей круга и кругового сектора. И теперь мы можем представить свои результаты общественности. На пресс-конференцию пришли корреспонденты различных изданий, они хотят получить ответы на интересующие их вопросы.

II. Актуализация опорных знаний

Ну а для начала кратко познакомим наших гостей с информацией о формулах, над изучением которых мы работали.

Вопросы

1. Назовите формулы для вычисления площади круга и площади кругового сектора.

2. Как можно вычислить площадь треугольника?

3. Площадь какой геометрической фигуры можно вычислить по данной формуле? (*Показываю плакаты с формулами площади параллелограмма, трапеции, квадрата, прямоугольника.*)

III. Пресс-конференция с корреспондентами журналов

Чтобы исключить ошибки при ответе на вопросы корреспондентов, обе «лаборатории» будут работать одновременно.

Корреспондент детского журнала «Домовенок». В редакцию нашего журнала пришло письмо от ученицы 6-го класса. Она увлекается лоскутным шитьем. Девочка просит помочь ей разрешить следующую проблему. Какой формы следует вырезать лепестки из квадратных кусочков ткани, чтобы более экономно ее расходовать? (Сторона квадрата равна a, рис. 1.)

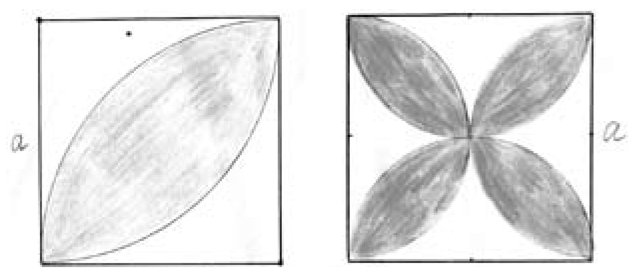


Рис. 1

Учитель. У кого есть идеи по решению этой задачи?

Ученик. Надо найти площадь лепестка.

Решение: Пусть a — сторона квадрата, радиус дуги окружности — R.

1. Площадь большого лепестка находится вычитанием из суммы площадей двух секторов $R = a$ площади квадрата со стороной a:

$$2\cdot\frac{\pi a^2}{4}-a^2=\frac{\pi a^2}{2}-a^2=\frac{a^2(\pi-2)}{2}.$$

2. Площадь четырех лепестков находится вычитанием из суммы площадей четырех полукругов радиуса $\frac{a}{2}$ площади квадрата со стороной a:

$$4\cdot\frac{\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}-a^2=\frac{\pi a^2}{2}-a^2=\frac{a^2(\pi-2)}{2}.$$

Ответ: площади фигур равны.

Корреспондент телепередачи «Очевидное — невероятное». Уфологи (специалисты, занимающиеся изучением неопознанных летающих объектов) этим летом были свидетелями необычного явления. В Ставрополье на полях обнаружены места с выжженной травой, по форме напоминающие геометрические фигуры огромных размеров. Они просят помочь определить их площадь.

(Ученикам выдаются вырезанные из картона геометрические фигуры, рис. 2. Все фигуры пронумерованы. На фигуре не должно быть никаких линий, но отмечены центры имеющихся окружностей. На доске вывешивается плакат с изображением тех же фигур.)

Учитель. Ребята, мы не знаем, как вычисляются площади таких фигур? Как выйти из затруднения?

Ученик. Надо разбить фигуру на части, площади которых мы умеем вычислять.

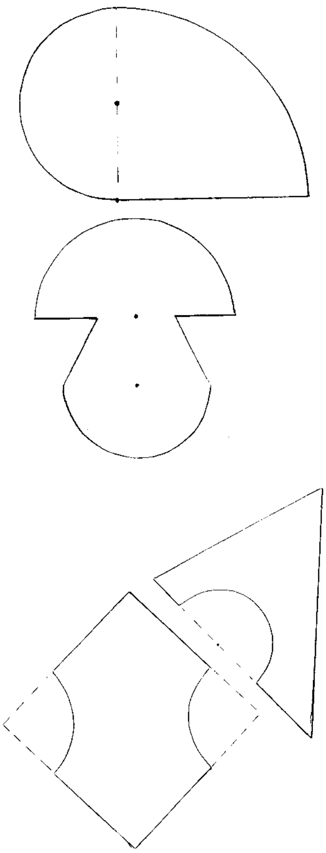


Рис. 2

Учитель. Перечертите фигуру в тетрадь, точнее, обведите ее карандашом. При записи измерений отрезков и углов разрешается для удобства округлять неточные значения.

Корреспондент журнала «Мои любимые цветы». В редакцию журнала пришло письмо от пенсионерки Петровой Марины Сергеевны. Она купила декоративный заборчик длиной 7 м для клумбы. Марина Сергеевна спрашивает, какой формы ей лучше сделать клумбу — круглой, квадратной или в форме равностороннего треугольника, чтобы ее площадь была наибольшей и можно было вырастить больше цветов.

Ответ: сторона квадрата равна $\frac{7}{4}=1{,}75$ (м), площадь квадрата $3{,}0625$ м^2; сторона треугольника $\frac{7}{3}\approx 2{,}3$ (м), площадь $2{,}36$ м^2; радиус круга $\frac{7}{6{,}28}\approx 1{,}1$ (м), площадь $3{,}9$ м^2; круг имеет наибольшую площадь.

Учитель. Этот результат мы получили не случайно. Одно из интереснейших свойств круга состоит в том, что при заданном периметре окружность ограничивает максимальную площадь.

Корреспондент журнала «Лесное хозяйство». В редакцию журнала пришла посылка от жительницы деревни Борок Архангельской области. Она пишет, что топит печку дровами (*Каждой «лаборатории» выдается полено, в основании которого — круговой сектор.*) и за один раз сжигает в среднем по 10 поленьев. Сколько это будет в кубометрах и сколько ей надо заготовить дров на месяц для одной печи. Вопрос не имеет прямого отношения к проблеме, над которой вы работаете, но не могли бы вы на него ответить?

Учитель. Давайте составим план для решения этой проблемы.

Ученик. 1. Вычислим объем полена в кубических метрах.

2. Умножим объем одного полена на 10.

3. Умножим на 30 дней.

IV. Подведение итогов урока

Учитель. На этом наша пресс-конференция закончилась. Корреспонденты газет и журналов получили ответы на все интересующие их вопросы. А вас, уважаемые сотрудники, ученый совет благодарит за хорошую работу. (*Выставляются оценки на работу на уроке.*)

ВНИМАНИЕ, КОНКУРС!

Редакция газеты «Математика» объявляет конкурс фотографий «Лето-осень-2007». На конкурс принимаются фотографии, на которых запечатлены учителя математики и их ученики 5–11-х классов в учебном процессе, на занятиях кружка, олимпиадах, в летних математических школах и пр. К каждой фотографии необходимо приложить краткое описание изображенного на ней события (место, время, действующие лица).

Фотографии могут быть цветными или черно-белыми. Формат для фотографий, отпечатанных на фотобумаге, не менее 10 × 15 см. Цифровые фотографии могут быть присланы на электронном носителе или по электронной почте. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат — JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, — высокое (*high*).

Лучшие фотографии будут напечатаны в газете, а победитель получит бесплатную подписку на первое полугодие 2008 года.

А. ОБРУБОВ, Т. СТРУКОВ, Е. НОВОДВОРСКАЯ, П. ЧУЛКОВ, Е. ШАПАРИН,
Москва

XVI Турнир Архимеда

Итоги заочного конкурса

Вот и настало время подвести итоги традиционного заочного конкурса XVI Турнира Архимеда. В 2006/2007 учебном году в нем приняли участие более 300 школьников из 44 регионов России, а также Республики Беларусь, Украины, Казахстана, Армении.

Условия задач были опубликованы в газете «Математика» (2007, № 3), а каждый участник конкурса должен был получить письмо с результатами проверки. Победителям и призерам конкурса были высланы дипломы и призы — сборник задач и решений этого конкурса, а занявшим первые и вторые места также сборники, посвященные математическим регатам.

Если ответ все же не был получен, просьба написать по адресу: 121165, Москва, ул. Киевская, 24, редакция газеты «Математика», с пометкой на конверте «Турнир».

Наибольшую активность в этом году проявили школьники из Москвы и Челябинской области. Победителями и призерами признаны 29 участников, а абсолютным победителем турнира стала Мария Рубаненко (Украина).

Победители и призеры

I место

Рубаненко Мария (Украина, г. Харьков, школа № 106, 7-й класс);

Чежин Сергей (Москва, центр образования № 218, 7-й класс);

Осипова Ольга (Республика Татарстан, г. Казань, гимназия № 19, 7-й класс);

Фещенко Илья (Москва, школа № 1189, 6-й класс).

II место

Миронова Анна (Москва, физико-математическая школа № 2007, 7-й класс);

Родионов Егор (г. Иркутск, лицей № 36 ОАО РЖД, 7-й класс);

Тушакова Мария (Московская обл., г. Видное, школа № 5, 7-й класс);

Афанасьева Анастасия (Москва, школа № 192, 7-й класс);

Багиров Руслан (Москва, школа № 1569, 7-й класс);

Гремяков Александр (Москва, школа № 1569, 7-й класс);

Добрышин Антон (Москва, школа № 1619, 6-й класс);

Косарева Елена (г. Нижний Новгород, лицей № 36, 7-й класс).

III место

Быкадоров Егор (Москва, гимназия № 1554, 7-й класс);

Мищенко Николай (г. Краснодар, школа № 93, 6-й класс);

Морозов Кирилл (Московская обл., г. Троицк, лицей, 7-й класс);

Федосеев Владислав (г. Липецк, гимназия № 64, 6-й класс);

Шихрагимова Наида (Ханты-Мансийский АО, г. Нягань, школа № 2, 6-й класс);

Комиссарчик Илья (Ленинградская обл., г. Сосновый Бор, гимназия № 5, 6-й класс);

Преображенский Артем (г. Воронеж, гимназия им. Н.Г. Басова при ВГУ, 7-й класс);

Анисимова Елена (г. Астрахань, физико-математическая школа № 32, 6-й класс);

Гольцова Надежда (Челябинская обл., г. Магнитогорск, школа № 5, школа ШИООД, 7-й класс);

Дзвоник Леонид (г. Астрахань, физико-математическая школа № 32, 7-й класс);

Иванов Илья (Ленинградская обл., г. Гатчина, школа № 2, 7-й класс);

Мельниченко Петр (Москва, традиционная гимназия, 5-й класс);

Хакимова Гульназ (Республика Башкортостан, Буздякский район, с. Буздяк, школа № 2, 7-й класс);

Измаилов Рамиль (Республика Татарстан, г. Казань, гимназия № 7, 6-й класс);

Исмагилов Искандер (Республика Татарстан, г. Нижнекамск, гимназия № 2 им. Баки Урмаче, 7-й класс);

Максаев Артем (Москва, гимназия № 1534, 6-й класс);

Сиротина Анастасия (Москва, физико-математическая школа № 2007, 5-й класс).

Математические кружки

I место. Школа № 1, г. Капан, Армения (учитель — *Р.Г. Бабалян*).

II место. Ученицы 6-го класса Дюпсюнской средней школы *Босикова Александра* и *Копырина Анна* (Республика Саха (Якутия), Усть-Станский улус, с. Дюпся; руководитель — *И.П. Эдуардовна*); кружок «Лига юных математиков» учащихся 6–7-х классов (Украина, г. Винница; руководители — *Т.С. Збожинская, И.М. Кривошея*).

Задачи и решения

Примечание жюри олимпиады. В задачах с двумя пунктами баллы не начислялись за верный ответ в пункте б) без обоснования.

1. Число и сумма его цифр. Какое наибольшее значение может принимать отношение трехзначного числа к сумме его цифр?

Ответ: 100.

Для числа 100 это отношение равно 100. Докажем, что большего значения получить невозможно, методом «от противного». Пусть для некоторого числа $100A + 10B + C$ выполнено неравенство

$$\frac{100A+10B+C}{A+B+C}>100.$$

После преобразований получим

$$100A + 10B + C > 100A + 100B + 100C,$$

откуда $0 > 90B + 99C$, что невозможно, так как B и C — цифры.

2. Числа по кругу. Можно ли расставить 9 чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, делилась на три и

а) была больше 9? б) была больше 12?

Ответ: а) Можно. Например: 1, 9, 2, 7, 3, 5, 4, 6, 8.

б) Нельзя. Пусть сумма в каждой тройке соседних чисел больше 12. Так как сумма чисел в тройке кратна 3, то она должна быть не меньше 15. Так как сумма всех девяти чисел от 1 до 9 равна 45, то сумма в каждой тройке равна 15. Но тогда числа, стоящие через каждые два места, должны быть равны, что невозможно. Возможно решение, основанное на следующей идее: сумму 15 требуется набрать 8 разными способами из предложенных чисел. Однако это сделать невозможно.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8								
7						3		
6				$Ф_1$				
5		2			$Ф_2$		0	
4			2	1	2	2		
3		$Ф_3$					1	
2				1		$Ф_4$		
1								

Рис. 1

3. Фигуры на доске. На шахматной доске расположены фигуры (не пешки!). На некоторых клетках написаны числа, которые соответствуют количеству фигур, «атакующих» эту клетку (рис. 1). Определите, какие фигуры стоят на доске, и восстановите позицию.

Ответ: слева направо: ферзь, конь, король, ладья.

Введем следующие обозначения: $Ф_1$ — фигура, стоящая на поле d6, $Ф_2$ — на e5, $Ф_3$ — на b3, $Ф_4$ — на f2 (рис. 2).

1. $Ф_2$ не ладья и не ферзь, поскольку только они могут бить клетку g5, а эту клетку не бьет никакая фигура. Значит, она не бьет и b5. Значит, клетку b5 бьют $Ф_1$ и $Ф_3$. Откуда $Ф_1$ — конь, а $Ф_3$ — ладья или ферзь.

2. Из пункта 1 следует, что $Ф_3$ бьет g5, значит, $Ф_4$ не бьет эту клетку. При этом $Ф_4$ — единственная фигура, которая может бить клетку d2 (так как $Ф_1$ — конь), значит, $Ф_4$ — ладья.

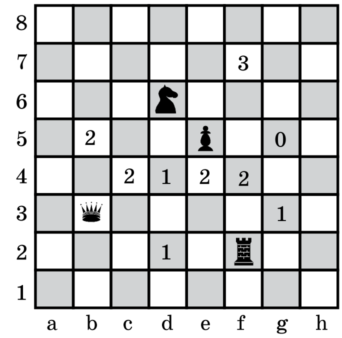


Рис. 2

3. $Ф_2$ бьет f4, поскольку $Ф_1$ — конь, а $Ф_3$ не может бить, какой бы фигурой она ни была. Значит, $Ф_2$ — не конь, откуда $Ф_3$ — ферзь, поскольку три фигуры должны бить f7.

4. $Ф_2$ осталось бить клетки d4, e4, f4. При этом $Ф_2$ не бьет g3, поскольку ее бьет $Ф_3$, значит, $Ф_2$ — не ферзь, а король.

При таком расположении фигур все выполняется.

Комментарий. Некоторые участники не обратили внимания на то, что фигуры атакуют клетки, а не другие фигуры, что привело к неверному решению.

4. Разрезание в пространстве. Можно ли плиту размером $8 \times 8 \times 27$ разрезать на четыре части и затем сложить из них куб? Ответ обоснуйте.

Решение. Разрежем плиту на 2 части и сложим из них параллелепипед $8 \times 12 \times 18$.

1. Сделаем ступенчатый разрез с шириной ступеньки 4 и высотой 9 (рис. 3).

2. Сложим полученные фигуры так, чтобы получить параллелепипед $8 \times 12 \times 18$.

3. Сделаем ступенчатый разрез с шириной ступеньки 4 и высотой 6 (рис. 4).

4. Сложим полученные фигуры так, чтобы получить куб $12 \times 12 \times 12$.

5. Игральный автомат. С натуральным числом, записанным в десятичной системе, разрешается проделать операции: 1) приписать на конце цифру 4;
2) приписать на конце цифру 0;
3) разделить на 2 (если число четно).

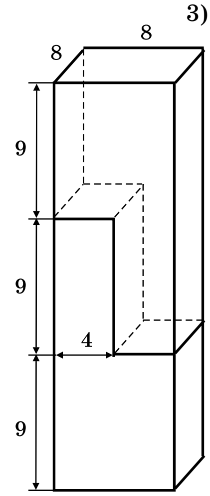


Рис. 3

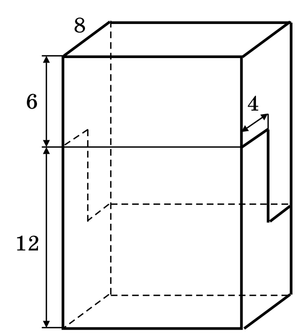


Рис. 4

а) Можно ли из числа 4 получить число 2007?

б) Какие числа можно получить из числа 4?

Ответ: а) можно; б) любые натуральные числа.

а) Вместо того чтобы получить с помощью операций А, Б, В из числа 4 число 2007, мы попробуем получить из числа 2007 число 4 с помощью обратных действий:

А′) вычеркивание цифры 4 в конце;

Б′) вычеркивание цифры 0 в конце;

В′) умножение числа на 2.

При этом каждый раз, как только это возможно, применять операцию А′ или Б′, чтобы по возможности на каждом шаге уменьшать наше число. Получим:

$$2007 \to 4014 \to 401 \to 802 \to 1604 \to 160 \to$$
$$\to 16 \to 32 \to 64 \to 6 \to 12 \to 24 \to 2 \to 4.$$

Ясно, что прочитав эту последовательность от конца к началу, мы получим нужный результат.

б) Чтобы из числа 4 получить произвольное натуральное число, поступим аналогично пункту а). Для этого докажем, что из числа N всегда можно получить число 4, применяя операции А′, Б′, В′. Вначале докажем это для произвольного четного числа. Для этого заметим, что:

1) из числа $10k$ можно получить число k, «обрезав» 0;

2) из числа $10k + 2$ можно получить $20k + 4$, а затем $2k$, «обрезав» 4;

3) из числа $10k + 4$ можно получить k, а затем $2k$;

4) из числа $10k + 6$ можно получить $20k + 10 + 2$, $40k + 20 + 4$, затем $4k + 2$;

5) из числа $10k + 8$ можно получить $20k + 10 + 6$, $40k + 30 + 2$, затем $80k + 60 + 4$ и $8k + 6$.

Видно, что в каждом случае число уменьшается, значит, в конечном итоге получим однозначное четное число ($k = 0$). Затем из полученного однозначного четного числа можно получить число 4 (подумайте самостоятельно, как). Доказательство для произвольного нечетного числа сведем к предыдущему, предварительно умножив нечетное число на 2.

6. Большой лист бумаги. Можно ли разрезать квадратный лист бумаги со стороной 1 м на

а) 31 квадрат, б) 30 квадратов

так, чтобы хотя бы один из них имел сторону не менее 1 мм?

Ответ: а) да; б) да.

Обратим внимание на то, что для решения задачи нам необходимо уменьшить сторону исходного квадрата более чем в 1000 раз.

а) Заметим, что, имея изначально 1 квадрат и разрезав его на четыре равные части, мы получаем из одного квадрата уже 4 квадрата, то есть на 3 больше. При этом стороны новых квадратов меньше сторон первоначального в 2 раза. Разрезав один из четырех полученных еще на четыре равных квадрата, мы уже получим $3 + 3 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ квадратов, то есть еще на 3 больше. Продолжая повторять подобную операцию деления одного из *новообразованных* квадратов на 4 равных, мы будем каждый раз увеличивать количество квадратов на 3. Легко заметить, что после 10 разрезаний мы получим $3 \cdot 10 + 1 = 31$ квадрат. При этом за 10 разрезаний длина стороны четырех наименьших квадратов окажется в $2^{10} = 1024$ раза меньше стороны исходного, то есть сторона исходного квадрата уменьшилась более чем в 1000 раз. Значит, сторона самого маленького квадрата будет меньше 1 мм. Возможны и другие способы разрезания.

б) Один из возможных способов решения следующий. На рисунке 5 показано, как можно разделить квадрат на 11 маленьких квадратов, причем длина стороны трех наименьших из них, как нетрудно заметить, будет в 11 раз меньше стороны исходного квадрата. На рисунке 6 показан способ разрезания квадрата на 10 маленьких, при котором длина стороны исходного квадрата уменьшается в 9 раз.

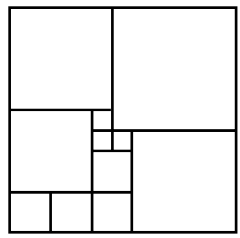


Рис. 5

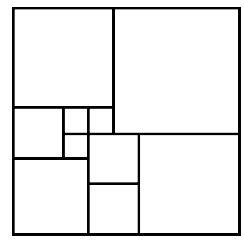


Рис. 6

Разрежем квадрат сначала на 11 квадратов, а затем один из получившихся наименьших еще раз на 11. Получим 21 квадрат, у трех из которых сторона в $11^2 = 121$ меньше стороны исходного квадрата. Разрежем один из этих квадратов на 10 частей (как на рис. 6), тогда мы получим ровно 30 квадратов, при этом сторона трех наименьших квадратов будет равна стороне исходного квадрата, уменьшенной в $11^2 \cdot 9 = 1089$ раз, то есть более чем в 1000 раз, меньше 1 м, что и требовалось.

7. Старинная задача. Крестьяне из трех сел потратили на починку моста 143 р. 65 к. Расходы было решено поделить пропорционально числу дворов и обратно пропорционально расстоянию от деревни до моста. Сколько должны заплатить жители каждой деревни, если в первой 50 дворов и она находится в 4 верстах от моста, во второй — 60 дворов, в 6 верстах от моста, в третьей — 160 дворов, в 8 верстах от моста?

Ответ: 1-я деревня — 42,25 р.; 2-я деревня — 33,8 р.; 3-я деревня — 67,6 р.

Найдем соотношение сумм, которые должны заплатить деревни:

$$\frac{\text{1-я дер}}{\text{2-я дер}} = \frac{\text{50 дворов}}{\text{60 дворов}} = \frac{\text{4 км}}{\text{6 км}} = \frac{5}{4};$$

$$\frac{\text{2-я дер}}{\text{3-я дер}} = \frac{\text{60 дворов}}{\text{160 дворов}} = \frac{\text{6 км}}{\text{8 км}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, соотношение сумм между деревнями должно быть следующее:

1-я дер. : 2-я дер. : 3-я дер. =

= 5 : 4 : 8 (то есть 17 частей).

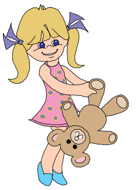
Откуда находим:

1-я деревня должна заплатить

$$143{,}65 : 17 \cdot 5 = 42{,}25 \text{ р.};$$

2-я деревня — $143{,}65 : 17 \cdot 4 = 33{,}8$ р.;

3-я деревня — $143{,}65 : 17 \cdot 8 = 67{,}6$ р.



Два дошкольника

Школьник Ваня решал задачу про двух дошкольников. Нужно было найти их возрасты (целые числа), а дано было произведение этих чисел. Ваня сказал, что задача неразрешима. Учитель похвалил его за правильный ответ и дал добавление: старшего зовут Петя. Тогда Ваня сразу решил задачу — решите и вы!

Решение. Эта классическая задача была добавлена В.И. Арнольдом в новое издание его сборника «Задачи для детей от 5 до 15 лет» (М: МЦНМО, 2007).

Для ее решения требуется умение не только логически мыслить, но и очень внимательно читать условие задачи, извлекая максимум информации из каждой фразы. Итак, давайте вместе с вашими учениками внимательно читать условие.

Ване нужно найти возрасты двух дошкольников, известно, что это целые числа. Значит, оба возраста (x и y) меньше 7 лет (ну и, конечно, больше 0).

Ваня не мог, зная только произведение n этих чисел, найти ответ, значит, n раскладывается в произведение двух целых чисел, меньших 7, не единственным образом.

Теперь самое нетривиальное использование условия. Какую же новую информацию получил Ваня, узнав, что старшего из ребят зовут Петя? Он теперь точно знает, что дошкольники не близнецы! То есть x и y — различные натуральные числа, меньшие 7.

Получив эту информацию, Ваня смог решить задачу. Значит, число n раскладывается в произведение **различных** целых чисел единственным образом.

Итак, n раскладывается в произведение натуральных чисел, меньших 7, ровно двумя способами, причем одно из этих разложений состоит из равных чисел, а одно из различных.

Проверим возможные варианты n. Среди всех квадратов чисел, меньших 7 (1, 4, 9, 16, 25, 36), только 4 имеет еще одно разложение, это $4 = 1 \times 4$.

Итак, дошкольникам 1 и 4 года. Условие, что они дошкольники, существенно, иначе, например, сразу возникает ложное решение $16 = 4 \times 4 = 2 \times 8$.

На аналогичных идеях строится большое число занимательных и олимпиадных задач. Одна из них была дана в заочном туре XVI турнира Архимеда, это задача 8 «Подслушанный разговор» (см. № 3/2007).

От редакции. Великий Ферма черкнул на полях письма рядом со своей великой теоремой фразу о том, что он знает доказательство, но для его изложения здесь недостает места. И 350 лет математики пытались его найти. В конце XX в. это, наконец-то, произошло. Первоначальное доказательство английский математик Эндрю Уайлс изложил в 1993 г. Специалисты взялись за тщательную проверку и через несколько месяцев, как уже не раз бывало прежде, обнаружили в нем пробелы. Но в целом его идеи были признаны глубокими и верными. Уайлс принялся устранять «дыры», и через год ему это сделать удалось. Обновленное доказательство выдержало все проверки. Так завершилась история доказательства великой теоремы. А что же Ферма? Вот мнение Уайлса: «Ферма не мог располагать таким доказательством. Это доказательство двадцатого века». Все это, видимо, означает, что если у Ферма и было доказательство, то в нем была «дыра».

Вы спросите, к чему вся эта поучительная история? В чем историческая параллель? К великому нашему сожалению, в решении задачи 8 мы нашли «дыру»; пока залатать ее не смогли. Но мы обязуемся вернуться к этой задаче через некоторое время. Возможно, надо дополнить условие. Если есть идеи, пишите. А пока приносим свои извинения и вам, и вашим ученикам. Уверены, что вы найдете для них верные и точные слова.

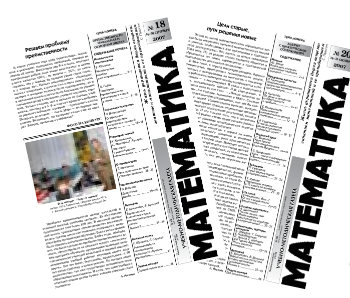
Читайте в I полугодии 2008 года

В рубрике «Лекторий»

Садовничий Ю. «Лекторий для абитуриента»

В рубрике «Страничка психолога»

Бусев В. «Записки практиканта»



В рубрике «Методическая консультация»

Потоскуев Е. «Рекомендации по изучению стереометрии»

В рубрике «Я веду кружок»

Спивак А. «Шарнирные механизмы»

Шеф-редактор С. Островский
Главный редактор Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель ООО «Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя:
ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (499)249 3138
Отдел рекламы: (499)249 9870
Редакция газеты «Математика»:
тел.: (499)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА **Тел.: (499) 249-47-58** **E-mail: podpiska@1september.ru**