Об итогах фотоконкурса и планах на лето

Наши дети давно уже растворились в сетях всемирной паутины, бродят по сайтам, освоились в блогах и чатах. Не пора ли и нам с вами отправиться в это увлекательное путешествие?

Не так давно прошла официальная информация о том, что каждая российская школа подключена к Интернету. Хочется верить, что это так. Косвенно об этом же свидетельствуют и опросы, проводимые нашим издательством, — количество учителей, пользующихся Интернетом, неуклонно растет (правда, не только за счет школьных ресурсов, но и домашних).

Что ж, отлично. Дело теперь за малым — научиться пользоваться открывшимися широкими возможностями для работы на уроке, для подготовки к уроку, для организации собственной деятельности. Наш вклад в это общее дело — номер, который вы держите в руках. Мы активизируем нашу рубрику «Компьютер на уроке математики», жизнь которой до этого интересными событиями не изобиловала. Мы задумались над тем, чтобы целиком посвятить один из летних номеров компьютерной тематике. И если у вас есть желание принять в этом участие, ждем ваших материалов. Тема эта изучена пока мало, а поэтому любое мнение, опыт, результаты (может быть, и не только удачные) будут интересны читателям газеты.

С окончанием осени снова пришла пора подвести итоги фотоконкурса. Интересным нам показалось то, что стали приходить не единичные фотографии, а дуэты. Автора одного такого дуэта мы и решили объявить победителем. Это О.А. Попова, учитель школы № 274 г. Москвы. Думаю, что ее фотографии «Всегда творю. Порою я актриса. То вдруг парабола, то биссектриса...», опубликованные в № 16, запомнились и вам. Формула ее успеха такова: фото + подпись в стихотворной форме + учитель в качестве наглядного пособия.

Поощрительную премию нам захотелось присудить Х.Х. Тимергалиевой, учителю из д. Новый Бердяш (Республика Башкортостан). В том же номере опубликована ее фотография, где она вместе со своими учащимися в окружении целого созвездия многогранников. У нее это уже третья опубликованная фотография. И дело даже не в том, что фотографии получаются хорошими, больше всего нас подкупает, как интересно работают учителя, как интересно их ученикам. Счастлив учитель, которому удается зажечь огонь в глазах своих учеников!

На этой оптимистичной ноте мы и переходим плавно в новый конкурс «Зима–весна-2008». А это значит, что мы вновь ждем ваших фотографий.

Л. Рослова

ФОТО НА КОНКУРС

Если звезды зажигают, значит, это кому-нибудь нужно...
Автор: Х.Х. Тимергалиева, средняя школа дер. Новый Бердяш, Республика Башкортостан

В ЭТОМ ВЫПУСКЕ

ВНИМАНИЕ, АНОНС!

Тема № 23: Компьютер на уроке математики

Компьютер позволяет усилить наглядную составляющую в преподавании математики, и учителя прежде всего берутся за применение возможностей компьютера в таких разделах, где наглядность играет основную роль — изучение свойств геометрических фигур и изучение графиков функций

Тема № 24: Обсуждаем прошедшие экзамены и готовимся к новым

Опубликована демоверсия ЕГЭ-2008, а само ее назначение продолжает обсуждаться. Важна еще одна проблема: критерии оценивания выполнения заданий повышенного уровня. В этом, а также и других контекстах параллельно можно рассмотреть новый экзамен для девятиклассников

Читайте в № 24
Календарь учителя математики

Каким должен быть календарь учителя математики? Конечно, «с математическим уклоном». Мы предлагаем вам календарь в форме додекаэдра. Ваши ученики с удовольствием сделают его для вас

#17
1—30 ноября 2007 г.

Электронный информационный спутник газеты «Математика»

Победители Межрегиональной математической олимпиады 2006/2007

6 класс

1. Азимов Рустам, средняя школа № 3, г. Луга Ленинградской области, учитель Рысьева Людмила Николаевна.

2. Акишин Дмитрий, гимназия № 19, г. Казань, учитель Гаврилова Наталья Николаевна.

3. Аргуянов Руслан, средняя школа № 1, г. Теберда, учитель Семеновна Зухра Гиджиевна.

4. Арсланов Тимур, Тастубинская средняя школа, с. Тастуба, Республика Башкортостан, учитель Иванова Елена Петровна.

5. Базылева Карина, Шарапская средняя школа Прокопьевский район Кемеровской области.

6. Батуева Ксения, гимназия № 127, г. Снежинск Челябинской области, учитель Мурашкина Нина Валерьевна.

7. Божева Лена, лицей № 39, г. Озерск Челябинской области, учитель Асватова Оксана Шахидулловна.

8. Вакулина Елена, средняя школа № 18, станица Ивановская Красноармейского района Краснодарского края, учитель Петель Светлана Васильевна.

9. Васин Иван, средняя школа № 1, г. Сухой Лог Свердловской области, учитель Павлова Ирина Витальевна.

10. Волков Александр, средняя школа № 162, г. Самара, учитель Сычева Лариса Николаевна.

11. Давыдов Денис, гимназия № 1, г. Белово Кемеровской области, учитель Федирко Елена Витальевна.

12. Деркач Валерия, лицей № 15, г. Саров Нижегородской области, учитель Любимцева Нина Владимировна.

13. Дулин Данил, Красноярская средняя школа, пос. Красный Яр Люблинского района Омской области, учитель Слюсарева Вера Ильинична.

14. Гуркина Евгения, средняя школа № 31, г. Ишим, учитель Валошина Ольга Михайловна.

15. Дмитриева Елена, средняя школа № 2, г. Цивильск, Чувашская Республика, учитель Кавтазеева Елена Юрьевна.

16. Додова Хава, гимназия № 1, г. Малгобек, Республика Ингушетия, учитель Циздаева Зуфра Макшариповна.

17. Канзафаров Айдар, гимназия № 2, г. Нижнекамск, Республика Татарстан, учитель Кинзябулатова Энзе Ильдусовна.

18. Керекеша Юлия, средняя школа № 52, г. Курск, учитель Соколова Галина Васильевна.

19. Кодзокова Аэлита, средняя школа № 1, с. Заюково Баксанского района, Республика Кабардино-Балкария, учитель Сабанчиева Хулимат Масхудовна.

20. Коркина Мария, средняя школа № 1, г. Усть-Кут Иркутской области, учитель Байчук Елена Владимировна.

21. Косоруков Валентин, средняя школа № 12, г. Тверь, учитель Лебедева Нина Ивановна.

22. Костюхина Вика, гимназия искусств, г. Белогорск Амурской области, учитель Радионова Ирина Анатольевна.

23. Кочерина Алла, Добрунская средняя школа, д. Добрунь Брянского района Брянской области, учитель Кравцова Нина Дмитриевна.

24. Крюков Владислав, Ратницкая основная общеобразовательная школа, Гаврилово-Посадский район Ивановской области, учитель Журавикина Ольга Руфимовна.

25. Кутышкина Алиса, средняя школа № 8, г. Ноябрьск, Ямало-Ненецкий автономный округ, учитель Борецкая Н.Г.

26. Лисицин Ярослав, средняя школа № 17, г. Белогорск Амурской области, учитель Терещенко Ирина Валентиновна.

27. Малинина Ирина, Ярославская средняя школа, с. Ярославка Дуванского района, Республика Башкортостан, учитель Машкова Татьяна Евгеньевна.

28. Марданова Гульназ, средняя школа № 2, г. Лениногорск, Республика Татарстан, учитель Авалян Фарида Равилевна.

29. Межаков Алексей, лицей № 10, г. Одинцово Московской области, учитель Трушко Зинаида Ильинична.

30. Миргалимова Ашена, лицей № 2, г. Бугульма, Республика Татарстан, учитель Газшова Елена Арсеньевна.

31. Мокшина Екатерина, гимназия № 4, г. Елабуга, Республика Татарстан, учитель Пензина Раиса Александровна.

32. Павлова Анастасия, средняя школа № 89, г. Казань, учитель Моисеева Нина Ивановна.

33. Пакалина Анна, лицей № 3, г. Кропоткин Краснодарского края, учитель Приходько С.В.

34. Пономарева Анастасия, средняя школа № 34, г. Хабаровск, учитель Соколова Надежда Александровна.

35. Русанов Антон, гимназия № 1, г. Армавир Краснодарского края, учитель Самедова Инна Сабировна.

36. Седышева Валерия, средняя школа № 15, г. Астрахань, учитель Кузнецова Елена Александровна.

37. Стаматова Любовь, Якиманско-Слободская средняя школа, Муромский район Владимирской области, учитель Баранова Тамара Аркадьевна.

38. Суворина Татьяна, гимназия «Мариинская», г. Таганрог, учитель Киктева Валентина Леопольдовна.

39. Суворова Анастасия, гимназия № 74, г. Барнаул Алтайского края, учитель Слободянник Оксана Владимировна.

40. Тещина Ирина, средняя школа № 8, г. Выкса Нижегородской области, учитель Приходько Вера Александровна.

41. Федина Мария, Коми национальная гимназия, г. Сыктывкар, Республика Коми, учитель Киваева Галина Васильевна.

42. Фокин Вадим, средняя школа № 1, г. Губкинский, Ямало-Ненецкий автономный округ, учитель Шишлянникова Алла Васильевна.

43. Хаара Кирилл, средняя школа № 76, пос. Гигант Сальского района Ростовской области, учитель Зотова Наталья Викторовна.

44. Холкин Александр, средняя школа № 43, г. Новоуральск Свердловской области, учитель Лемешова Ольга Петровна.

45. Чернова Ксения, средняя школа № 2, пос. Суходол Сершевского района Самарской области, учитель Шестеркина Людмила Валентиновна.

46. Чувайкин Михаил, средняя школа, д. Напольные Котяки Канашского района, Чувашская Республика, учитель Иванова Лидия Ивановна.

47. Шкалина Лилия, лицей № 9, г. Зеленодольск, Республика Татарстан, учитель Мишенькина Татьяна Ивановна.

48. Юголайнина Евгения, гимназия № 9, г. Буденовск, учитель Глушкова Алевтина Николаевна.

49. Якубовская Юлия, средняя школа № 1, г. Советский Тюменской области, ХМАО–Югра, учитель Попова Галина Николаевна.

7 класс

1. Бурдина Наталья, средняя школа № 178, г. Екатеринбург, учитель Котова Елена Николаевна.

2. Видякина Анастасия, средняя школа № 4, г. Кодинск Кежемского района Красноярского края, учитель Брюханова Ирина Николаевна.

3. Воронина Вероника, лицей № 9, г. Сибай, Республика Башкортостан, учитель Хуснутдинова Гульдар Шагитовна.

4. Гонтаренко Татьяна, Дегтяренская средняя школа, Вейделевский район Белгородской области, учитель Гамаюнова Татьяна Николаевна.

5. Горшкова Мария, средняя школа № 7, г. Тверь, учитель Старостина Светлана Александровна.

6. Гричунова Дарья, гимназия № 21, г. Казань, учитель Кварацелия Татьяна Кирилловна.

7. Данилова Екатерина, Фоминская средняя школа, с. Фоминки Гороховецкого района Владимирской области, учитель Бебенина Ольга Анатольевна.

8. Дикий Игорь, средняя школа № 15, станица Роговская Тимашевского района Краснодарского края, учитель Полбина Татьяна Егоровна.

9. Димиева Динара, средняя школа, д. Меллятамак Муслюмовский района, Республика Татарстан, учитель Халилова Венера Сагитовна.

10. Дрыгин Александр, средняя школа, пос. Горные Ключи-1 Кировского района Приморского края, учитель Демченко Валентина Васильевна.

11. Дородько Ольга, Петровская средняя общеобразовательная школа, Гурьевский район Калининградской области, учитель Дородько Елена Николаевна.

12. Евтушенко Татьяна, лицей № 15, г. Саров Нижегородской области, учитель Теленгатор Светлана Владимировна.

13. Ермеева Анастасия, средняя школа № 1, г. Цивильск, Республика Чувашия, учитель Ермеев Валерий Александрович.

14. Измайлова Дарья, средняя школа № 22, г. Казань, учитель Куницына Маргарита Олеговна.

15. Карпов Михаил, средняя школа № 148, г. Самара, учитель Кычанова Марина Петровна.

16. Курманаева Гульназ, средняя школа № 5, г. Стерлитамак, Республика Башкортостан, учитель Иванова Елена Алексеевна.

17. Михнев Павел, средняя школа № 8, г. Краснокаменск Читинской области, учитель Ружникова Наталья Николаевна.

18. Петрова Диана, средняя школа № 2, пос. Крестцы Новгородской области, учитель Павлова Надежда Алексеевна.

19. Поволоцкий Илья, средняя школа № 62, г. Екатеринбург, учитель Крестинская Нина Ивановна.

20. Полянская Елена, физико-математический лицей, г. Глазов, Удмуртская Республика, учитель Яковлева Ольга Владимировна.

21. Ренжина Влада, лицей № 10, г. Одинцово Московской области, учитель Зюзгина Марина Владимировна.

22. Сарычева Юлия, лицей, г. Лесной Свердловской области, учитель Яремчук Валентина Петровна.

23. Сергеев Олег, средняя школа № 1, с. Еткуль Еткульского района Челябинской области, учитель Алабушкина Надежда Ивановна.

24. Таличенкова Наталья, средняя школа № 15, станица Н. Стеблиевская Краснодарского края, учитель Е.Г. Тапинова.

ФОТО НА КОНКУРС

В конце концов мы подрастем и в архитекторы пойдем!
Автор: Д. Романовский, ученик 8 «А» класса СОШ № 7, с. Янкуль, Ставропольский край

25. Тихонович Яна, средняя школа № 17, г. Новокуйбышев Самарской области, учитель Ртищева Светлана Геннадьевна.

26. Яковчук Алеся, средняя школа № 2, г. Буденовск Ставропольского края, учитель Литвинова Татьяна Викторовна.

8 класс

1. Апарин Артем, средняя школа № 15, г. Вышний Волочек Тверской области, учитель Трубецких Александр Александрович.

2. Акимова Александра, средняя школа № 3, г. Сосновый Бор Ленинградской области, учитель Борисова Татьяна Георгиевна.

3. Воронин Кирилл, гимназия «Логос», г. Дмитров Московской области, учитель Кочева Галина Николаевна.

4. Гамайлова Резеда, Башкирская гимназия, г. Агидель, Республика Башкирия, учитель Камалова Рашида Мингажевна.

5. Герасимов Арсений, средняя школа № 2, г. Верхняя Салда Свердловской области, учитель Аминева Тамара Ефимовна.

6. Денисова Лилия, ЛНИП, г. Королев Московской области, учитель Ерофеева Татьяна Васильевна.

7. Евсеев Захар, республиканский политехнический лицей, г. Сунтар, Республика Саха (Якутия), учитель Иванова Инна Владимировна.

8. Закиров Марат, гимназия № 3, г. Зеленодольск, Республика Татарстан, учитель Марьина Наталья Александровна.

9. Кравченко Сергей, средняя школа № 30, г. Таганрог Ростовской области, учитель Бурмистрова Валентина Николаевна.

10. Короткова Нелли, средняя школа № 3, г. Сосновый Бор Ленинградской области, учитель Борисова Татьяна Георгиевна.

11. Николина Екатерина, средняя школа № 15, с. Лиман Ипатовского района Ставропольского края, учитель Бондарь Валентина Владимировна.

12. Панов Алексей, лицей № 3, г. Старый Оскол Белгородской области, учитель Зиновьева Лариса Петровна.

13. Разбегаева Ксения, средняя школа № 8, г. Вологда, учитель Шумская Галина Петровна.

14. Рахманов Денис, лицей авиационного профиля, г. Самара, учитель Костина Ольга Александровна.

15. Суворова Ирина, средняя школа № 3, г. Сосновый Бор Ленинградской области, учитель Борисова Татьяна Георгиевна.

16. Фельдина Евгения, средняя школа № 1, г. Цивильск, Чувашская Республика, учитель Ермеев Валерий Александрович.

17. Шматко Яна, лицей № 1, г. Балтийск Калининградской области, учитель Любжина Анна Казимировна.

9 класс

1. Аверичева Светлана, лицей № 1, г. Комсомольск-на-Амуре Хабаровского края, учитель Будлянская Наталья Леонидовна.

2. Глибенко Надежда, лицей № 1, г. Комсомольск-на-Амуре Хабаровского края, учитель Будлянская Наталья Леонидовна.

3. Дарбинян Анна, средняя школа № 17, г. Армавир Краснодарского края, учитель Сантаровская Ольга Николаевна.

4. Козловская Виктория, средняя школа № 1, г. Георгиевск Ставропольского края, учитель И.Е. Шарикова.

5. Куянов Даниил, средняя школа № 3, г. Богородск Нижегородской области, учитель Отопкова Алла Павловна.

6. Макаева Альбина, средняя школа Кармаскалинского района, Республика Башкортостан, учитель Вахитова Зиля Ягудовна.

7. Мельниченко Анна, лицей № 1, г. Комсомольск-на-Амуре Хабаровского края, учитель Будлянская Наталья Леонидовна.

8. Милякин Сергей, школа для одаренных детей № 2 им. Дубинина при ВГУЭС, г. Владивосток Приморского края, учитель Олейник Галина Алексеевна.

10 класс

1. Чепанов Никита, гимназия № 1, г. Клин Московской области, учитель Мовсесян Ирина Николаевна.

2. Малютин Даниил, гимназия, г. Ливны Орловской области, учитель Карагодина Светлана Анатольевна.

3. Минаева Марина, средняя школа № 4, г. Тосно Ленинградской области, учитель Е.Н. Калмагорова.

4. Сгоннов Дмитрий, средняя школа № 8, г. Топки Кемеровской области, учитель Поплавская Татьяна Николаевна.

АНОНС

Темы ближайших номеров

№ 1 Статистика на уроках математики
№ 2 Софизмы
№ 3 Блиц-опрос
№ 4 Обобщающий урок

Читайте в I полугодии 2008 года

В рубрике «Лекторий»
Садовничий Ю. Лекторий для абитуриента
В рубрике «Страничка психолога»
Бусев В. Записки практиканта
В рубрике «Методическая консультация»
Потоскуев Е. Рекомендации по изучению стереометрии
В рубрике «Я веду кружок»
Спивак А. Шарнирные механизмы

Ю. ГАМБУРГ
Москва

Занимательная наука Я.И. Перельмана

В этом году исполняется 125 лет со дня рождения Я.И. Перельмана — человека, который сделал для физики и связанных с ней наук не меньше, чем целый университет, в одиночку изменив понимание физики и математики несколькими поколениями российских школьников. Сотни тысяч, а может быть, миллионы любознательных людей пришли в науку под его влиянием.

Из его книг, от которых трудно оторваться, мы в детстве узнавали множество вещей: как одним пальцем создать огромное давление (с помощью иглы), как видят рыбы из-под воды, что такое первая и вторая космическая скорости. Узнавали, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ (и поэтому все числа вида $abcabc$ делятся на эти три числа). Прочитав Перельмана раньше, чем Жюля Верна, я уже знал об ошибке великого романиста, возникшей в романе «Из пушки на Луну»: он думал, что невесомость будет достигнута только в точке, где лунное и земное притяжения равны, а в действительности невесомость существует во всё время свободного полета.

От него юные читатели узнавали такие удивительные слова и понятия, как «парабола», «гипербола», «гипотеза Лапласа», «равнодействующая» и даже «формула Эйлера» и «теорема Ферма»! Из его остроумных задач они видели, что нередко достаточно записать условие с помощью формул, и решение уже готово! Удивлялись тому, что с помощью таинственного знака log можно записать любое целое число — хоть миллион! — тремя двойками.

Все это Перельман сделал возможным благодаря своему поразительному умению удивлять читателя. Он совершенно справедливо (и прозорливо) писал: «Вода была бы, без сомнения, самым удивительным веществом в природе, а Луна — наиболее впечатляющим зрелищем на небе, если бы то и другое не попадалось на глаза слишком часто». Поэтому для любого предмета он находил такой угол зрения, такой поворот, при котором тот заиграет всеми своими драгоценными гранями.

Якову Исидоровичу повезло в детстве и ранней юности: он учился у хороших физиков и математиков в школе в г. Белосток, где он родился, в Петербургском лесном институте, где лекции по физике читал большой знаток своего дела и практик профессор Лачинов. Помогло ему и литературное дарование, и способности к языкам — он знал их пять, и природная любознательность. Он интересовался не только точными науками — еще в студенческие годы подготовил к изданию перевод пяти томов Брэма («Жизнь животных»).

Замечательная особенность книг Перельмана еще и в том, что он по ходу дела сообщает множество разнообразных фактов. Очень хорошо объяснена относительность движения на простом примере: перейти с дорожки, движущейся со скоростью 30 км/ч, на соседнюю, движущуюся со скоростью 35 км/ч, не труднее, чем ступить на эскалатор. Явление термического расширения остроумно иллюстрируется таким примером: телеграфная линия Москва–Петербург (650 км) зимой укорачивается на несколько сот метров. Кто же крадет этот провод? Мороз. Уменьшается провисание провода. Рельсовый же путь укорачивается в меньшей степени (у стали меньше коэффициент расширения) и притом за счет стыков. А почему, если пролететь по 500 км поочередно на север, восток, юг и запад, не попадешь в ту же точку? Вот наглядный пример из сферической геометрии, точнее, географии — там, где эти две науки соприкасаются.

Замечательно то, что многие задачи изложены в форме изящных новелл, с легко просматривающимися действующими лицами и даже характерами. От Перельмана мы узнаем, что поэт Бенедиктов (кстати, очень интересный литератор) был и автором сборника занятных математических головоломок. Таких фактов немало разбросано по его занимательным книгам. Перельман привлекает огромное количество литературных материалов из самых разных областей, и это не случайно: в его личной библиотеке было более 10 тысяч книг. Почти все они были прочитаны и пестрели закладками: он отмечал и в своих новеллах комментировал места, имевшие отношение к естественным наукам, иногда поправляя автора (и делая математический анализ вопроса), иногда соглашаясь с ним — и также иллюстрируя свое согласие простым расчетом.

В моей библиотеке есть старая «Живая математика» и другие книги, и во всех указан адрес автора с настоятельной просьбой — написать, откликнуться, спросить что-то, сообщить свои замечания. Отзывов Перельман получал множество, в том числе от крупнейших специалистов — таких как О.Д. Хвольсин, автор лучшего в то время многотомного курса физики. Младшеклассником мне тоже хотелось написать письмо автору книги «Знаете ли вы физику», но я не знал тогда, что он умер от голода в блокадном Ленинграде в 1942 г. Работы Перельмана намного пережили своего создателя. Вот уже 65 лет они продолжают призывать в науку все новых и новых учеников.

Стоит вспомнить и о том, что книги Я.И. Перельмана непосредственно стимулировали написание многих других, ставших классическими произведений научно-популярного жанра — «Занимательной минералогии» и «Занимательной геохимии» Ферсмана, «Занимательной ботаники» Цингера, «Слова о словах» Успенского и многих других, а в последние годы и «Занимательной химии» Леенсона.

Сегодня мы вновь с благодарностью вспоминаем о «докторе занимательных наук» Якове Исидоровиче Перельмане. Очень вероятно, он был величайшим популяризатором науки в XX в.

Е. СЕМЕНКО, Н. ОВЧАРЕНКО,
г. Краснодар

Сценарий праздника «Страна Перельмания»

Организация и подготовка праздника

Праздник проводится для учащихся 9-х классов. Продолжительность праздника 2,5–3 часа.

За неделю до праздника вывешивается объявление:

Удивительному и любознательному человеку, необыкновенному и талантливому математику, физику, автору интереснейших книг

ЯКОВУ ИСИДОРОВИЧУ ПЕРЕЛЬМАНУ

посвящается наш праздник, который состоится 22 ноября в актовом зале школы.

Программа праздника

1. Рассказ о Я.И. Перельмане.
2. Викторина для всех присутствующих.
3. Математический бой команд 9-х классов.
4. Шуточный аукцион.

Для проведения праздника необходимо подготовить плакаты, которыми будет оформлен зал. Подготовить плакаты поручается учащимся. Например, на плакатах могут быть следующие высказывания:

«Природа говорит языком математики: буквы этого языка — круги, треугольники и иные математические фигуры» (*Г. Галилей*);

«Предмет математики настолько серьезен, что полезно не упускать случаев делать его немного занимательным» (*Б. Паскаль*);

«Математику уж затем учить следует, что она ум в порядок приводит» (*М. Ломоносов*).

Тексты задач, которые будут использованы во время проведения викторины и математического боя, должны быть подготовлены для показа через проектор (зал, в котором проводится праздник, должен быть оснащен соответствующей техникой).

Для успешного проведения математического боя необходимо предварительно ознакомить учащихся с его правилами, которые можно вывесить в кабинете математики и прокомментировать членам команд при их подготовке к математическому бою.

Учащиеся каждого класса параллели 9-х классов принимают участие в формировании состава команд. Они предлагают кандидатуры учащихся, которые обсуждаются вместе с учителями. Затем учителя математики, работающие в этих классах, корректируют состав каждой команды так, чтобы они оказались приблизительно равными по силе. Команды выбирают капитанов и готовят небольшое приветствие (возможно, вместе со своими болельщиками-одноклассниками).

Для проведения праздника необходимо выбрать двух ведущих и состав жюри; подготовить тексты задач для конкурса капитанов, викторины и математического боя. Тексты задач математического боя нужно распечатать в таком количестве экземпляров, чтобы его получил каждый член команды, жюри и ведущие математического боя.

Правила математического боя

Члены команд-участниц собираются в школе за час до начала проведения праздника. Председатель жюри выдает капитану каждой команды конверт с заданиями, и команды удаляются в заранее подготовленные аудитории для решения задач и выработки стратегии матбоя. Общее время, отводимое на решение задач, — около 2 часов.

Спустя примерно час после начала решения задач командами, в актовом зале начинается викторина.

Для выдачи призов и проведения аукциона нужно напечатать математические деньги (*перельманчики*) в необходимом количестве.

После того как команды закончили решение задач, а викторина проведена, объявляется конкурс капитанов: двум капитанам задается один и тот же вопрос, как только один из капитанов ответил, конкурс заканчивается. Если ответ правильный, то победила команда этого капитана. Победившая команда определяет, какая из команд будет «вызывать» первой. После чего следует вызов на одну из задач матбоя.

Вызванная команда может принять вызов и выставить на решение этой задачи своего докладчика, другая команда при этом выставляет оппонента. Вызванная команда может не принять вызов и объявить «проверку корректности». Тогда вызвавшая команда выставляет докладчика, а вызванная — оппонента.

Докладчик на доске приводит свое решение (может пользоваться листком с записанным решением задачи). Оппонент после ответа докладчика указывает ошибки или выражает свое согласие с решением. Жюри после согласия оппонента или после того, как вопросы оппонента исчерпаны, может задавать докладчику свои вопросы.

Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Докладчик за полный ответ получает 12 баллов, а оппонент не более 6 (6 баллов, если докажет ложность решения докладчика). Оппоненту X, доказавшему ложность решения докладчика Y, набравшего уже m баллов, может быть предложено привести свое решение задачи. В этом случае докладчик Y становится оппонентом. Если X приводит верное решение, то получает $12 - m$ баллов.

Если оппонент обнаружил «дырку» в решении докладчика, которую жюри оценило, например, в 4 балла, то он сразу получает половину — 2 балла. Если докладчик не может закрыть «дырку» (1 минута на обдумывание), то это предлагается сделать оппоненту. Тот из них, кто закроет «дырку», получает остальные 2 балла (иначе эти 2 балла забирает жюри).

Если задача докладчиком в принципе решена, то он получает не менее 6 баллов.

Право на вызов поочередно переходит от одной команды к другой, за исключением случая, когда вызов оказался некорректным (вызвавшая команда после проверки корректности не представила в принципе решенную задачу).

Однако команда может отказаться вызвать другую (не имеет больше решенных задач и боится проверки корректности). Тогда другая команда может представить решение какой-либо из оставшихся задач (опять с участием докладчика и оппонента).

Каждый из участников, не считая конкурса капитанов, может выходить к доске не более двух раз (обычно в команде не менее 7 и не более 12 участников). В ходе математического боя капитан не более трех раз может брать минутный перерыв, во время которого может заменить своего участника, отвечающего у доски.

Вести переговоры с жюри может лишь капитан или временный его заместитель (например, если отвечает сам капитан).

За подсказку отвечающему у доски или другие нарушения жюри может у одной из команд снять баллы в свою пользу.

Закон математического боя — последнее слово остается всегда за жюри.

Если разница в очках между командами после окончания боя не превышает 2 балла, то жюри фиксирует «ничью».

Задачи математического боя

1. Оратор высыпал на стол все спички из коробка и стал распределять их в три кучки.

— Костер собираетесь раскладывать? — шутили слушатели.

— Головоломка, — объяснил загадчик, — будет со спичками. Вот их три неравные кучки. Во всех вместе 48 штук. Сколько в каждой, я вам не сообщаю. Зато отметьте следующее: если из первой кучки я переложу во вторую столько спичек, сколько в этой второй кучке имелось, затем из второй в третью переложу столько, сколько в этой третьей перед тем будет находиться, и, наконец, из третьей переложу в первую столько спичек, сколько в этой первой кучке будет тогда иметься, — если, говорю, все это проделать, то число спичек во всех кучках станет одинаково. Сколько же было в каждой кучке первоначально?

[22, 14, 12]

2. В одном ящике лежит 10 пар коричневых и 10 пар черных носков, в другом — 10 пар коричневых и 10 пар черных перчаток. По сколько носков и перчаток достаточно извлечь из каждого ящика, чтобы из них можно было выбрать одну (какую-либо) пару носков и одну пару перчаток?

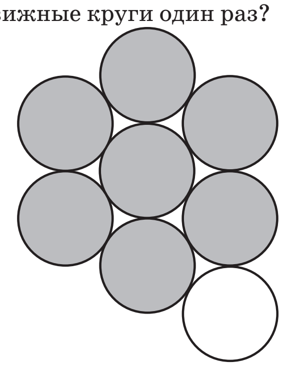
[3 носка и 21 перчатку.]

3. Лыжник рассчитал, что если он станет делать в час 10 км, то прибудет на место назначения часом позже полудня; при скорости же 15 км/ч он прибыл бы часом раньше полудня. С какой скоростью должен он бежать, чтобы прибыть на место ровно в полдень?

[12 км/ч]

4. На внутренней стенке стеклянной цилиндрической банки виднеется капля меда в трех сантиметрах от верхнего края сосуда. А на наружной стенке, в точке, диаметрально противоположной, уселась муха. Укажите мухе кратчайший путь, по которому она может добраться до медовой капли. Высота банки 20 см, диаметр 10 см.

5. Перед вами восемь равных кругов. Семь заштрихованных неподвижны, а восьмой (светлый) катится по ним без скольжения. Сколько оборотов он сделает, обойдя неподвижные круги один раз?



[4 оборота.]

6. Докажите, что если внутри большого круга катить по его окружности круг вдвое меньшего диаметра, то во время этого движения любая точка на окружности малого круга будет двигаться по прямой, являющейся диаметром большого круга.

7. Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее в 24 дня, а 30 коров — в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней?

[20 коров.]

8. Идя вдоль трамвайного пути, я заметил, что каждые 12 минут меня нагоняет трамвай, а каждые 4 минуты я сам встречаю трамвай. И я, и трамвай движемся равномерно. Через сколько минут один после другого покидают трамвайные вагоны свои конечные пункты?

[6 минут.]

9. Старшеклассники обязались вырыть на школьном участке канаву и организовали для этого бригаду землекопов. Если бы бригада работала в полном составе, канава была бы вырыта в 24 часа. Но в действительности к работе приступил сначала только один член бригады. Спустя некоторое время присоединился второй, еще через столько же времени — третий, за ним через такой же промежуток — четвертый и так до последнего. При расчете оказалось, что первый работал в 11 раз дольше последнего. Сколько времени работал последний?

[4 часа.]

10. Чему равно 84, если $8 \cdot 8 = 54$?

[100]

Проведение праздника

(*На сцене двое ведущих. На экране портрет Я.И. Перельмана.*)

1-й ведущий. Перельман Яков Исидорович — популяризатор физики и математики родился в 1882 г. в г. Белостоке. Он начал публиковать свои научно-популярные статьи еще будучи студентом. В 1909 г. он окончил Петербургский лесной институт, получил диплом лесовода.

2-й ведущий. Перельман являлся одним из первых пропагандистов идей К.Э. Циолковского. Он автор термина «научная фантастика». Яков Исидорович написал свыше 100 книг («Занимательная физика», «Занимательная алгебра», «Занимательная геометрия», «Живая математика», «Межпланетные путешествия» и др.), которые были переведены на многие языки и изданы тиражом более 10 000 000 экземпляров.

1-й ведущий. Немало «сенсационных» нелепостей из области физики печаталось в то время в различных бульварных изданиях, а Перельман, читая многочисленные письма читателей в редакцию журнала «Природа и люди», сталкивался с неправильным толкованием элементарных физических явлений, законов механики, с бесчисленными теориями создания вечного двигателя и т.д. Это натолкнуло его на поиски оригинальной формы борьбы с бытовавшим невежеством. Была еще одна причина, побудившая Перельмана написать задуманную книгу. Он не питал симпатий к оторванным от действительности «казенным» учебникам по физике. Конечно, он отдавал себе отчет в том, что его «Занимательная физика» не призвана заменить официальные пособия, она должна рассказать о физических явлениях совсем по-иному и иным языком. В начале 1908 г. Перельман завел специальную папку с надписью «Пригодится для будущей книги», — какой именно, он еще и сам себе до конца не представлял. Папка постепенно наполнялась выписками, набросками и вырезками.

2-й ведущий. Год спустя он приступил к работе над книгой, а осенью 1910 г. рукопись «Занимательная физика. Сто сорок парадоксов, задач, опытов, замысловатых вопросов и прочее» была завершена. В 1913 г. книга вышла в свет и имела большой успех у читателей.

1-й ведущий. Яков Исидорович Перельман не сделал никаких научных открытий, ничего не изобрел в области техники, не имел никаких научных званий и степеней. Он лишь горячо, до самозабвения, любил науку, которой был безгранично предан, и совершил самый настоящий переворот в научно-популярной литературе.

2-й ведущий. Но нисколько не преувеличивая можно сказать, что в области, которой он посвятил свою жизнь, ему удалось совершить открытие — найти верный и действенный способ увлечь миллионы людей наукой, знаниями. Яков Исидорович сумел влюбить в математику, физику, астрономию самых обыкновенных людей: взрослых и детей. Его книги стали для многих известных ученых, космонавтов первым шагом навстречу мечте. Может быть, и сегодняшний наш праздник станет точкой отсчета для чьих-то свершений, тропинкой к исполнению заветных желаний.

1-й ведущий. Все вопросы и задачи, которые сегодня здесь прозвучат, взяты из удивительных книг Якова Исидоровича Перельмана. Итак, мы начинаем!

2-й ведущий. Позвольте познакомить вас с составом жюри. (*Оглашается состав жюри.*) Через некоторое время в этом зале состоится математический бой. Команды-участницы матбоя получили тексты задач до начала нашего праздника и сейчас, возможно, уже решили большую их часть и выработали стратегию игры.

1-й ведущий. Пока наши команды готовятся к бою, давайте проведем конкурс «Вопрос — ответ».

Время проведения конкурса 50–60 минут. У каждого сидящего в зале имеется бумага и ручка. Вопросы поочередно задаются ведущими. Задачи конкурса высвечиваются на экране, ведущие зачитывают каждую задачу и вызывают из зала учащихся, готовых дать ответ. Оценку правильности ответов дает жюри. За каждый правильный ответ участнику начисляется 10 баллов и вручается 10 математических денежных купюр достоинством один перельманчик. Если жюри оценивает решение задачи викторины как неполное, то автор решения может получить меньшее количество купюр (столько, сколько решит жюри).

Вопросы викторины

1. То, о чем я расскажу, происходило в 1932 г. Мне тогда было ровно столько лет, сколько выражают две последние цифры года моего рождения. Когда я об этом соотношении рассказал деду, он удивил меня заявлением, что с его возрастом выходит то же самое. Мне это показалось невозможным…

— Разумеется, невозможно, — вставил чей-то голос.

— Представьте, что вполне возможно. Дед доказал мне это. Сколько же лет было каждому из нас?

[Деду 66 лет, внуку 16 лет.]

2. Двое рабочих, старик и молодой, проживают в одной квартире и работают на одном заводе. Молодой доходит от дома до завода в 20 мин, старый — в 30 мин.

Через сколько минут молодой догонит старого, если последний выйдет из дому 5 минутами раньше его?

[10 мин]

3. Кузнецу принесли 5 обрывков цепи, по 3 звена в каждом обрывке, и заказали соединить их в одну цепь. Прежде чем приняться за дело, кузнец стал думать, сколько колец понадобится для этого раскрыть и вновь заковать. Он решил, что придется раскрыть и снова заковать четыре кольца. Нельзя ли, однако, выполнить работу, раскрыв и заковав меньше колец?

[Можно; 3 звена.]

4. На пустую шашечную доску надо поместить две шашки разного цвета. Сколько различных положений могут они занимать на доске?

[4032]

5. Расставить 24 человека в шесть рядов так, чтобы каждый ряд состоял из пяти человек.

[Расставить людей в форме правильного шестиугольника, на каждой стороне которого, включая вершины, стоит 5 человек.]

6. Пять землекопов в 5 часов выкапывают 5 м канавы. Сколько землекопов в 100 часов выкопают 100 м канавы?

[5 землекопов.]

7. В мастерской отремонтировано в течение месяца 40 машин — автомобилей и мотоциклов. Всех колес выпущено было из ремонта ровно 100. Сколько было в ремонте автомобилей и сколько мотоциклов?

[Автомобилей 10, мотоциклов 30.]

8. Три дюжины лимонов стоят столько рублей, сколько дают лимонов на 16 рублей. Сколько стоит дюжина лимонов?

[8 рублей.]

9. Товар на 10% подорожал, потом на 10% подешевел. Когда цена его была ниже: до подорожания или после подешевления?

[После подешевления.]

10. Банка с медом весит 500 г. Та же банка с керосином весит 350 г. Керосин легче меда в два раза. Сколько весит пустая банка?

[200 г]

11. Часы бьют три. И пока они бьют, проходит 3 секунды. Сколько же времени должны употребить часы, чтобы пробить семь?

[9 секунд.]

12. Два поезда вышли одновременно с двух станций навстречу друг другу. Первый достиг станции назначения спустя час после их встречи. Второй — спустя 2 часа 15 минут после встречи. Во сколько раз скорость одного поезда больше скорости другого?

[В 1,5 раза.]

13. Сотню орехов нужно разделить между 25 людьми так, чтобы никому не досталось четное число орехов. Можете ли вы это сделать?

[Нет.]

14. Выразите единицу, употребив все 10 цифр и знаки математических действий.

[Например, $\frac{148}{296}+\frac{35}{70}=1.$]

15. Который год позапрошлого столетия увеличивается в 4,5 раза, если на него смотреть в зеркало?

[1818]

16. Улитка вздумала взобраться на дерево в 15 м высотой. В течение каждого дня она успевала подниматься на 5 м, но каждую ночь, во время сна, спускалась вниз на 4 м. Через сколько суток она достигнет вершины дерева?

[Через 10 суток и один день.]

1-й ведущий. Наша викторина окончена. Можете подсчитать прибыль, которую вы получили в результате участия в викторине.

2-й ведущий. Пока мы с вами проводили викторину, наши команды подготовились к математическому бою и готовы к атаке.

1-й ведущий. Приглашаем на сцену команды. (*Звучат приветствия команд.*)

2-й ведущий. На сцену вызываются капитаны. По правилам математического боя, конкурс капитанов проводится для того, чтобы определить, какая команда первой будет делать вызов.

1-й ведущий. Задача капитанам. Гражданин получил сдачи 4 рубля 65 копеек рублями, гривенниками (монеты достоинством 10 копеек) и копеечными монетами. Всех монет ему дали 42. Сколько монет каждого достоинства ему было дано?

[Например, 2 рубля, 25 гривенников, 15 копеек.]

Далее проходит математический бой. По окончании жюри объявляет результаты и итоговое количество баллов команд.

2-й ведущий. А теперь переведем заработанные баллы в денежный эквивалент и проведем математический аукцион.

Один из способов перевода баллов: каждый участник команды получает столько купюр, сколько баллов набрала его команда в математическом бое. Для проведения математического аукциона необходимо некоторое число предметов (лотов), которые не видят участники вечера. Лотов должно быть столько, чтобы участники вечера могли потратить все заработанные деньги. Ведущие по очереди объявляют лоты.

1-й ведущий. Лот № 1. (*Тетрадь.*) Продается хранитель знаний, вещь совершенно необходимая каждому учащемуся. Начальная цена 1 перельманчик.

Лот № 2. (*Маркер.*) Продается штучка заграничная. Начальная цена 1 перельманчик.

Лот № 3. (*Модель тетраэдра.*) Продается труд бессонных ночей. Начальная цена 1 перельманчик.

Лот № 4. (*Мел.*) Важное для каждого из вас орудие производства. Начальная цена 1 перельманчик.

Лот № 5. (*Пятерка по алгебре.*) Продается заветная мечта каждого ученика. Мечта, как вы понимаете, должна стоить дорого. Начальная цена 2 перельманчика.

2-й ведущий. Итак, последний лот продан. Наш праздник окончен.

1-й ведущий. Надеемся, что вам было интересно. До новых встреч, друзья!

Соревнование по профессиональным качествам

23 сентября 2007 г. состоялся IV Творческий конкурс учителей математики. Организаторами конкурса выступили Московский институт открытого образования, Московский центр непрерывного математического образования, газета «Математика», математический факультет Московского педагогического государственного университета и Московский городской педагогический университет. Хотя очный конкурс обычно проводится только для учителей Москвы, на этот раз в нем приняли участие учителя математики из других регионов – победители заочного конкурса.

По условиям конкурса участие в нем является добровольным и анонимным, т.е. каждому участнику присваивается личный код, по которому он (и только он) может узнать свои результаты. Результаты конкретных участников не могут быть известны ни в школе, ни в округе. Объявляются только фамилии победителей конкурса. Победителями конкурса могут стать учителя, успешно выполнившие задания, при условии, что они ведут в школе в текущем учебном году не менее 9 уроков в неделю и не являются победителями предыдущего (очного) Творческого конкурса учителей. Получение диплома конкурса может служить основой для повышения квалификационной категории (разряда).

В этом году энтузиастов, захотевших и рискнувших потратить выходной день на решение не самых простых задач, оказалось 60 москвичей и 9 победителей заочного конкурса. Проходил конкурс в здании математического факультета МПГУ.

После того, как работы были сданы и уставшие, но удовлетворенные участники конкурса вышли из аудитории, редакция газеты «Математика» провела небольшой опрос – нам хотелось выяснить их отношение к этому мероприятию. Оказалось, что большинство участвуют в конкурсе просто ради интереса, некоторые хотят проверить свой профессиональный уровень. На вопрос: «Что дает Вам участие в конкурсе?» – многие ответили: «Помогает держать форму». Интересными оказались ответы на вопрос о сравнении этого конкурса и конкурса «Учитель года»: все участники единодушно сошлись во мнении, что творческий конкурс учителей математики лучше, поскольку он «более профессиональный и объективный», «мы соревнуемся по профессиональным качествам, а не занимаемся созданием шоу».

Спросили мы участников и об отношении к их участию в конкурсе коллег по школе, администрации, а также учеников. И надо сказать, что если дети все поддерживают своих учителей и желают им успешного выступления, то администрация образовательного учреждения относится, как правило, безразлично, а коллеги и того хуже – бывает, что и осуждают, считая это желанием выделиться, заявить о себе, усматривают в этом негативное отношение к другим учителям. Интересно, а как коллеги относятся к участникам конкурса «Учитель года»?

С другой стороны, по словам участников, дипломы, выдаваемые газетой «Математика» победителям заочного конкурса, востребованы и засчитываются при прохождении аттестации. Мы рады, что можем оказать вам содействие, и обращаем на этот немаловажный факт внимание тех, кто умеет решать задачи, но еще думает, стоит ли тратить силы и время на участие в конкурсе. Кстати, заметим, что было высказано пожелание выдавать свидетельства всем участникам заочного конкурса, и думаем, что это предложение примем. Подумаем и о призах.

Задания конкурса делятся на две части – математическую, где надо решить задачи, и методическую, где нужно найти ошибки в решении, проанализировать его с позиции учителя. Как выяснилось, участникам конкурса одинаково нравится как математическая, так и методическая части. Впрочем, у выпускников мехмата МГУ (особенно молодых) тяга больше к математической части, что, в общем-то, вполне естественно.

Большинству участников конкурса задания не показались слишком сложными, хотя некоторые при этом признавались, что решили не все. «Но если сделать задания проще, то будет неинтересно!» – говорили они.

И наконец, назовем победителей конкурса. Ими стали:

Р.Н. Алишев (Нижнекамск), С.Е. Шилейко, Д.И. Шарыгин, А.А. Марачев, Т.В. Соколова, Ю.А. Блинков, Д.Г. Мухин, А.Н. Андреева, А.В. Алферов (все Москва), Б.И. Цорин (г. Балашиха, Московская обл.), О.А. Багишова (Москва), Ю.О. Пукас (г.Троицк, Московская обл.), И.А. Шайкина, И.Г. Эрлих, С.Ю. Кириллова, А.И. Сгибнев, Н.М. Нетрусова, Я.И. Абрамсон (Москва), А.Ф. Аскеров (г. Махачкала, Республика Дагестан), С.В. Афанасьева (Москва)


Р.Н. Алишев (Нижнекамск)

Материал подготовлен
В. Бусевым

А. БЛИНКОВ, Е. ГОРСКАЯ, И. ЯЩЕНКО,
Москва

Второй заочный творческий конкурс учителей математики

Подведены итоги второго заочного творческого конкурса учителей математики, который был организован газетой «Математика» совместно с Московским центром непрерывного математического образования (2007, № 1). Информация о конкурсе была размещена также на сайте www.mccme.ru. На выполнение заданий отводилось около четырех месяцев.

Победители конкурса

Н.И. Авилов (станица Егорлыкская, Ростовская область);
А.Е. Алексеев (пос. Морки, Республика Марий Эл);
Р.Н. Алишев (г. Нижнекамск, Республика Татария);
Л.А. Аржанцева (г. Троицк, Московская обл.);
А.Ф. Аскеров и *Г.О. Габибулаев* (г. Махачкала, Республика Дагестан);
С.В. Буфеев (Москва);
В.Л. Дорофеев (г. Мытищи, Московская обл.);
В.А. Замараев (с. Разъезжее, Красноярский край);
А.В. Каплиев (г. Ногинск, Московская обл.);
Ю.Н. Королев (г. Казань, Республика Татария);
А.В. Перегудова и *В.А. Перегудов* (с. Первомайское, Алтайский край);
Ю.О. Пукас (г. Троицк, Московская обл.);
И.Н. Рочев (г. Иваново);
Т.В. Соколова (Москва);
Н.П. Уваровский (с. Хатассы, Республика Саха).

Задания для конкурса были подготовлены методической комиссией, работавшей на базе МЦНМО. Вариант включал в себя три блока: два основных и один дополнительный. Первый блок — математические задачи, которые требовалось решить; второй блок — формулировки математических утверждений и их «доказательства», в которых требовалось найти ошибки и, по возможности, привести верные доказательства. Эти блоки включали в себя задания по арифметике, алгебре, математическому анализу, геометрии и комбинаторике.

Третий блок являлся необязательным: мы попросили участников конкурса отметить задания, которые им более всего понравились, а также придумать свои для подобного конкурса. Жюри конкурса благодарно участникам, откликнувшимся на просьбу организаторов. Наиболее интересными для учителей оказались задания № 1, 4–6.

В ходе выполнения работы участники могли продемонстрировать умение решать задачи, найти ошибку в чужом решении и отличить верное решение от неверного, знание различных разделов школьной программы и свою математическую эрудицию. Отдельно отметим важность методической составляющей, так как она в большей степени отражает повседневную работу учителя.

В конкурсе приняло участие 28 работ учителей (2 — коллективные, остальные — индивидуальные). География участников конкурса весьма обширна и разнообразна — от Москвы, Санкт-Петербурга и Севастополя до маленьких поселков и деревень в Бурятии, Дагестане, Иркутской и Тюменской областях, Чувашии, Якутии и т.д.

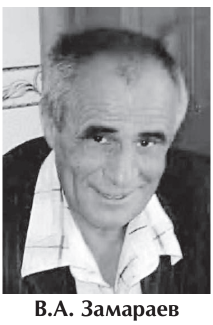
Победителями объявлены участники, набравшие более 45 баллов. Победители конкурса награждены специальными дипломами и математической литературой и приглашены в Москву для участия в IV Творческом конкурсе учителей математики.

Интересно, что А. Аскеров, В. Замараев, А. Каплиев и Т. Соколова стали победителями заочного конкурса второй год подряд, причем трое последних стали также и призерами III (очного) Творческого конкурса учителей по математике, который проходил в Москве в сентябре 2006 г. Кроме того, Ю. Пукас был призером первого и второго творческих конкурсов, а Ю. Королев дважды признавался призером интернет-туров (на втором и третьем конкурсах).

Организаторы будут благодарны за любые идеи и замечания по дальнейшему совершенствованию конкурса, которые просим присылать в редакцию газеты или по электронному адресу olteach@mccme.ru.

Ниже публикуются задания конкурса, тексты решений и примерные критерии проверки. В настоящую публикацию мы постарались включить наиболее интересные решения, присланные участниками конкурса.


А.Е. Алексеев


В.А. Замараев


Л.А. Аржанцева


Т.В. Соколова


А.В. Каплиев

Задания конкурса

I. Решите задачи

1. (*А. Шаповалов, Турнир математических боев им. А.П. Савина, 1996 г.*) Управдом Остап Бендер собрал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич заинтересовался, почему у них в третьем подъезде надо собрать денег на 20% больше, чем во втором, хотя квартир во всех подъездах поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трехзначные — втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в каждом подъезде?

2. (*Костромская ЛМШ, 1997 г.*) Контора «Тише едешь — дальше будешь» строит дорогу. В первый месяц она строит один километр дороги, а в каждый следующий месяц $\frac{1}{x}$ км, где x км — длина дороги, уже построенной к началу этого месяца. Сможет ли эта контора построить дорогу длиной 97 км?

3. (*Фольклор, предложила Е. Горская.*) К некоторому числу справа приписывают по одной произвольной цифре, исключая цифру 9. Докажите, что рано или поздно получится составное число.

4. (*А. Войнов, ученик 10-го класса.*) Даны две пересекающиеся окружности. Через одну из их общих точек A проводятся все возможные секущие, которые вторично пересекают данные окружности в точках B и C. Найдите геометрическое место точек M таких, что

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}.$$

5. (*И. Рубанов, Международный турнир городов, весна 1998 г.*) Дан клетчатый квадрат размером 5×5. В некоторых клетках проведена одна из диагоналей, при этом никакие две диагонали не имеют общего конца. Какое наибольшее количество диагоналей могло быть проведено?

II. В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так и в ответах, решениях или доказательствах). Если утверждение неверно — приведите контрпример и найдите ошибки в доказательстве. Если неверно только решение (доказательство) — укажите ошибки и приведите верное решение (доказательство).

6. Уравнение (*А. Блинков*). Решите уравнение

$$(x^2 + 2x - 5)^2 + 2(x^2 + 2x - 5) - 5 = x.$$

Ответ: $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

«Решение». Пусть $f(x) = x^2 + 2x - 5$, тогда уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$ или, что то же самое, $f(x) = f^{-1}(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, поэтому если они пересекаются, то точка пересечения графиков лежит на этой прямой. Таким образом, если число x_0 — корень данного уравнения, то оно является и корнем уравнения $f(x) = x$. Решая уравнение $x^2 + 2x - 5 = x$, получим, что

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

7. Рыцари (*А. Ковальджи*). Собрались n рыцарей. Известно, что у каждого рыцаря не меньше чем $\frac{n}{2}$ друзей. Докажите, что их можно так рассадить за круглым столом, что справа и слева от каждого рыцаря будет сидеть его друг.

«Решение». Докажем утверждение задачи методом математической индукции. Для $n = 2$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для некоторого n; докажем, что оно верно, когда количество рыцарей равно $n + 1$. Отправим одного (например, Петю) за дверь, а остальных n рыцарей рассадим за круглым столом. Теперь найдем место для Пети. Для каждого друга Пети рассмотрим его правого соседа. Если все эти соседи — враги, то врагов у Пети не меньше, чем друзей, что противоречит условию. Следовательно, найдутся два друга Пети, сидящие подряд. Между ними мы и посадим Петю.

8. Пятиугольник (*Из книги Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, Richard K. Guy. Unsolved problems in geometry. Springer-Verlag. Предложили А. Сгибнев и Д. Шноль*). Найдите точку, лежащую в плоскости данного выпуклого пятиугольника, для которой сумма расстояний до всех его вершин наименьшая.

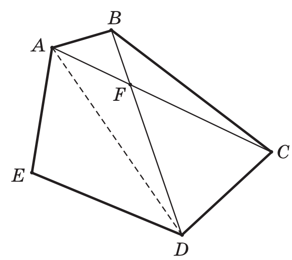


Рис. 1

Ответ: эта точка является предельной точкой последовательности пятиугольников, в которой каждый последующий пятиугольник образован диагоналями предыдущего.

«Доказательство». Рассмотрим выпуклый пятиугольник $ABCDE$ (рис. 1). Заметим, что четырехугольник $ABCD$ также выпуклый, и точка, для которой сумма расстояний до его вершин минимальна, это точка F пересечения его диагоналей. Теперь рассмотрим задачу о минимуме для пятиугольника, то есть «подключим» вершину E. Получим, что точка минимума для пятиугольника лежит на отрезке FE, то есть *внутри* угла AFD, образованного диагоналями AC и BD.

Выбирая поочередно по четыре вершины пятиугольника и повторяя рассуждение, получим, что точка минимума должна лежать внутри пятиугольника, образованного пятью его диагоналями. Применяя все вышесказанное к каждому следующему пятиугольнику, получим, что искомая точка лежит внутри любого из последовательности пятиугольников, стягивающихся в точку, то есть в этой предельной точке. Утверждение доказано.

Ответы, решения, комментарии и критерии проверки

Задача 1. В каждом подъезде по 66 квартир.

Поскольку Остап Бендер упомянул трехзначные номера и не упомянул четырехзначные, то в первых трех подъездах не менее чем 100 квартир, но не более чем 999. Из условия задачи следует также, что хотя бы одна квартира во втором подъезде имеет двузначный номер (иначе стоимость номеров квартир второго и третьего подъездов была бы одинаковой). Тогда остается рассмотреть три случая:

а) во втором подъезде все квартиры имеют двузначные номера, а в третьем подъезде все квартиры имеют трехзначные номера;

б) во втором подъезде есть квартиры и с двузначными, и с трехзначными номерами, а в третьем — только с трехзначными;

в) во втором подъезде все квартиры имеют двузначные номера, а в третьем подъезде есть квартиры и с двузначными, и с трехзначными номерами.

1. В случае а) в первом и втором подъездах расположено 99 квартир. Поскольку 99 — нечетное число, то этот случай невозможен.

2. Пусть n — количество квартир в каждом подъезде, а x — количество квартир с двузначными номерами во втором подъезде. Тогда, по условию,

$$3n = 1{,}2(2x + 3(n - x)).$$

Преобразовав, получим, что $n = 2x$. Следовательно, $99 = n + x = 1{,}5n$, откуда $n = 66$.

3. Пусть n — количество квартир в каждом подъезде, а k — количество квартир с двузначными номерами в третьем подъезде. Тогда, по условию,

$$2k + 3(n - k) = 1{,}2 \cdot 2n.$$

Преобразовав, получим, что $3n = 5k$. Следовательно, $99 = n + n + \frac{3}{5}n$, откуда $n = \frac{99 \cdot 5}{13}$. Поскольку n должно быть целым числом, то этот случай также невозможен.

Комментарий. Отметим, что если допустить, что в первых трех подъездах могут быть и квартиры, номера которых содержат более трех цифр, то возможны также ответы $n = 4545$ или $n = 5454$. Некоторые участники рассматривали и этот случай, но на получение полного балла при проверке это не влияло.

Критерии проверки: 10 баллов — полное обоснованное решение; 5 баллов — не рассмотрен случай, когда в третьем подъезде есть квартиры с двузначными номерами; 2 балла — приведен только верный ответ.

Задача 2. Да, сможет.

Способ I (*Р. Алишев, аналогичную идею использовал и А. Алексеев*). Пусть S_n – длина дороги, построенной конторой к концу n-го месяца. По условию

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 + 1 = 2,$$

$$S_3 = 2 + \frac{1}{2},\ \ldots,\ S_{n+1} = S_n + \frac{1}{S_n},\ \ldots,$$

то есть последовательность $\{S_n\}$ возрастает.

Предположим, что контора не сможет построить дорогу длиной 97 км. Тогда $\forall n \in N\ S_n < 97$, то есть эта последовательность ограничена сверху. Возрастающая ограниченная последовательность имеет предел, следовательно, $S_{n+1} - S_n \to 0$, то есть

$$\exists N \mid \forall n \ge N\colon\ S_{n+1} - S_n < \frac{1}{97},$$

откуда $\frac{1}{S_n} < \frac{1}{97}$, то есть $S_n > 97$. Получили противоречие, поэтому контора сможет построить дорогу длиной 97 км.

Комментарий. То что последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела, можно было показать и по-другому.

Например (*И. Рочев*): заметим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$, кроме того, из условия следует, что $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{S_{n-1}}$, и $S_1 = 1$. Следовательно, при $n \to \infty$ $S_n \to +\infty$.

Или так (*Т. Соколова*): пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a < +\infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n + \frac{1}{S_n}\right) = a$, откуда $a + \frac{1}{a} = a$ — противоречие, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Многие участники решили задачу, сравнивая длину дороги, построенной к концу n-го месяца, с частичной суммой гармонического ряда. Приведем наиболее четко оформленное решение.

Способ II (*А. Перегудова и В. Перегудов*). Рассмотрим равенства:

$$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} = 2,\ a_3 = a_2 + \frac{1}{a_2} = \frac{5}{2},\ \ldots,$$

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}},$$

где a_n — длина дороги, построенной к концу n-го месяца. Сложив левые и правые части равенств, получим:

$a_n = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}$. Заметим, что $a_3 < 3$, и для $k > 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{a_k} < 1$, следовательно, $a_k < k$ при $k > 2$. Тогда

$$a_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i} \ge 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

Последнее слагаемое является частичной суммой гармонического ряда, который расходится при $n \to \infty$, следовательно, и длина дороги неограниченна, то есть контора сможет построить дорогу длиной 97 км.

Комментарий. Показать, что ряд $\sum a_n$ расходится, можно было также сравнив $\{a_n\}$ с другими последовательностями. Например, Ю. Королев доказал, что $\forall n \in \boldsymbol{N}\ \ a_n \geq \sqrt{2n-2}$. Так как при $n \to \infty$ $\sqrt{2n-2} \to \infty$, то ряд $\sum a_n$ расходится.

Способ III (*А. Аскеров и Г. Габибулаев, аналогичное решение предложил и Н. Уваровский*). Пусть a_n — длина дороги, построенной к концу n-го месяца. Из условия задачи следует, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$. Заметим, что $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \dfrac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2$. Таким образом,

$$a_n^2 > a_{n-1}^2 + 2,\ \ a_{n-1}^2 > a_{n-2}^2 + 2,\ \ \ldots,\ \ a_2^2 > a_1^2 + 2.$$

Из этих равенств вытекает, что $a_{n+1}^2 > a_1^2 + 2n = 1 + 2n$, то есть $a_{n+1} > \sqrt{2n+1}$. Следовательно, при таком n, что $\sqrt{2n+1} \geq 97$, контора наверняка построит 97 км дороги.

Комментарий. Приведем еще несколько решений, в которых другими способами доказывается, что последовательность $\{a_n\}$ неограниченна.

Способ IV (*В. Андреева, аналогично — В. Дорофеев*). Пусть a_n — длина всей дороги, построенной к концу n-го месяца, а x_n — длина дороги, построенной только за n-й месяц. Из условия задачи следует, что

$$x_1 = a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n},\ \ \ x_{n+1} = \frac{1}{a_n} \text{ и } a_n = a_1 + \ldots + x_n.$$

Заметим также, что последовательность $\{a_n\}$ — возрастающая, а последовательность $\{x_n\}$ — убывающая. Предположим, что $\{a_n\}$ ограничена сверху некоторым числом M, то есть $\forall n \in \boldsymbol{N}\ \ a_n < M$. Тогда $x_n = \dfrac{1}{a_{n-1}} > \dfrac{1}{M}$ для всех n, начиная с $n = 2$. (На самом деле это верно для всех n, поскольку можно выбрать $M > 1$, а для такого M верно и неравенство $x_1 > \dfrac{1}{M}$.) Тогда

$$a_{M^2} = x_1 + \ldots + x_{M^2} > \frac{1}{M} M^2 = M.$$

Получили противоречие.

Комментарий. Еще одна интерпретация той же идеи предложена А. Каплиёвым: предположим, что все члены последовательности $\{a_n\}$ меньше 97. Тогда

$$\forall n \in \boldsymbol{N}\ \ a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} > \frac{1}{97}.$$

Следовательно,

$$x_{9071} - x_1 = (x_{9071} - x_{9700}) + (x_{9070} - x_{9699}) + \ldots +$$
$$+ (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) > \frac{1}{97} \cdot 9700 = 100,$$

откуда $x_{9071} > 100 + 1 = 101$. Противоречие.

Также можно было оценивать не длину дороги, а время, необходимое для постройки фиксированного количества километров, и указать время, за которое контора гарантированно построит 97 километров дороги. Именно так поступили Т. Жалнина и Ю. Пукас.

Способ V (*Т. Жалнина*). Из условия задачи следует, что за первые два месяца будет построено 2 км дороги. В течение каждого следующего месяца, пока не будет построено 10 км дороги, ежемесячно будет закладываться x_k км, при этом $\dfrac{1}{10} < x_k < \dfrac{1}{2}$. Следовательно, через $2 + \dfrac{8}{0,1} = 82$ месяца контора наверняка построит 10 км дороги. С этого момента и до тех пор, пока контора не построит 97 км дороги, ежемесячно будет закладываться x_k км, при этом $\dfrac{1}{100} < x_k < \dfrac{1}{10}$. Следовательно, на прокладывание 97 км дороги точно хватит $82 + \dfrac{87}{0,01} = 8782$ месяцев работы конторы.

Комментарий. Оценка времени, приведенная в последнем решении, сильно завышена. Компьютерные вычисления (результаты которых приведены в нескольких работах) показывают, что на построение дороги длиной 97 км компании потребуется 4703 месяца (почти 392 года).

Критерии проверки: 10 баллов — полное обоснованное решение; 4 балла — в решениях, использующих гармонический ряд, не объяснено, почему $a_k > \dfrac{1}{k}$, либо в решениях, использующих оценку времени, не объяснено неравенство, применяемое для этой оценки; 1 балл — приведен только верный ответ.

Задача 3. Заметим, что, приписав к исходному числу любую четную цифру или цифру 5, мы сразу получим составное число. Следовательно, осталось рассмотреть случаи, когда приписываются цифры 1, 3 или 7. Цифры 1 и 7 имеют один и тот же остаток от деления на 3, следовательно, мы можем приписать их не более двух раз (иначе какое-то из получающихся чисел будет делиться на 3). Таким образом, рано или поздно мы сможем приписывать только цифру 3. Предположим, что в тот момент, начиная с которого, мы можем использовать только цифру 3, полученное число больше пяти (иначе рассмотрим число после следующего шага). Докажем, что среди чисел вида $\overline{p3\ldots3}$ (p — некоторое простое число, большее 5) найдется составное число. Это можно сделать по-разному.

Например так: рассмотрим $p + 1$ число вида 3, 33, 333, ..., $\overline{33...3}$. Среди этих чисел найдутся два, дающие одинаковые остатки от деления на p. Пусть это числа $\underbrace{3...33}_{k}$ и $\underbrace{3...33}_{n}$, где $k > n$. Рассмотрим их разность $\underbrace{3...33}_{k} - \underbrace{3...33}_{n} = \underbrace{3...33}_{k-n}\underbrace{0...0}_{n}$, она делится на p.

Поскольку p — простое число и $p > 5$, то на p будет делиться число $\underbrace{3...33}_{k-n}$. Таким образом, получаем, что среди чисел, записываемых одними тройками, найдется число, делящееся на p, следовательно, и среди чисел вида $\overline{p33...3}$ найдется число, делящееся на p. Таким образом, рано или поздно мы получим составное число.

Критерии проверки: 10 баллов — полное обоснованное решение; 7 баллов — сформулировано, но не доказано утверждение о том, что среди чисел вида $\overline{33...3}$ найдется число, делящееся на p (где p — произвольное простое число); 3 балла — верно объяснено, почему нельзя приписывать четные цифры и цифру 5 и почему нельзя приписать более двух раз цифры 1 или 7, и только; 1 балл — верно объяснено только, почему нельзя приписывать четные цифры и цифру 5, и только.

Задача 4. Окружность, проходящая через точку A, центром которой является четвертая вершина O параллелограмма O_1AO_2O, где O_1 и O_2 — центры данных окружностей.

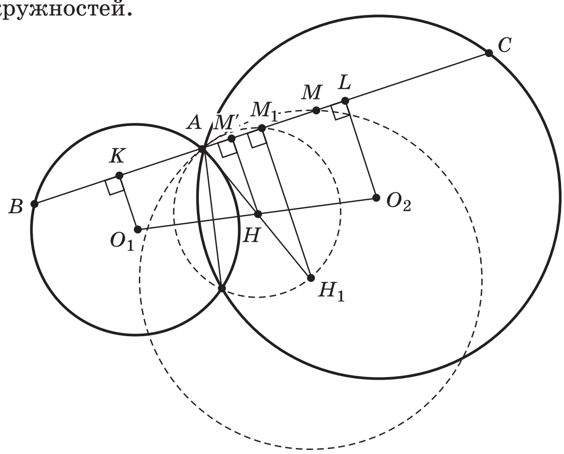


Рис. 2

Комментарий. Сначала приведем два способа решения, в которых доказывается, что искомое ГМТ — окружность, проходящая через точку A, не используя явного знания о ее центре и радиусе.

Способ I (*Р. Алишев*). Найдем сначала геометрическое место точек M_1 таких, что $\overline{AM_1} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{AC}\right)$.

Тогда искомое ГМТ получится из найденного при гомотетии с центром A и коэффициентом 2.

Записанное векторное равенство равносильно тому, что точка M_1 является серединой секущей BC. Пусть O_1 и O_2 — ц ентры исходных окружностей, H — середина отрезка O_1O_2 (рис. 2). Покажем, что геометрическим местом середин секущих BC является окружность с центром в точке H. Пусть K, L и M' — основания перпендикуляров, опущенных из точек O_1, O_2 и H на BC соответственно. Тогда K — середина AB, L — середина AC, M' — середина KL. При гомотетии с центром в точке A и коэффициентом 2 точка K перейдет в точку B, точка L перейдет в точку C, а точка M' перейдет в точку M_1. Поскольку точка M' лежит на окружности с диаметром AH, то точка M_1 лежит на окружности с диаметром AH_1 ($AH_1 = 2AH$). Следовательно, искомое ГМТ — окружность с центром в точке H_1 и радиусом AH_1.

Комментарий. Отметим, что такой способ решения частично совпадает с решением задачи 7.28 из задачника В.В. Прасолова.

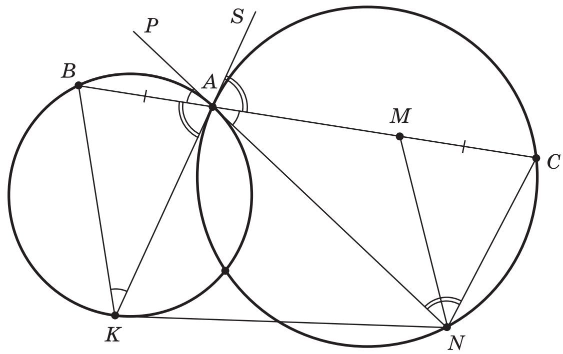


Рис. 3

Способ II (*Е. Батуева; Т. Соколова*). Рассмотрим случай, когда секущая BC пересекает окружности в точках, лежащих по разные стороны от точки A (рис. 3).

Поскольку $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$, то в данном случае точка M принадлежит отрезку BC и $MC = AB$. Пусть PN и SK — касательные к окружностям, проходящие через точку A. Будем считать касательную предельным положением секущей и включим точки N и K в искомое ГМТ.

Используем свойство угла между касательной и хордой:

$$\angle CAN = \angle BAP = \angle AKB,$$

аналогично,

$$\angle BAK = \angle SAC = \angle ANC.$$

Следовательно, треугольники KBA и ACN подобны (по двум углам), откуда $\frac{AB}{CN} = \frac{AK}{AN}$. Поскольку $AB = MC$, то $\frac{MC}{CN} = \frac{AK}{AN}$. Заметим также, что $\angle ACN = \angle KAN$. Следовательно, треугольники

MCN и KAN подобны (по двум сторонам и углу между ними), откуда $\angle AKN = \angle CMN$. Таким образом, $\angle AKN + \angle AMN = 180°$, следовательно, точки A, K, N и M лежат на одной окружности.

В случае, когда точки B и C лежат по одну сторону от точки A, можно провести аналогичное рассуждение, воспользовавшись тем, что четыре точки лежат на одной окружности, если равны соответствующие вписанные углы.

Комментарий. Возможно было действовать и «в обратную сторону», то есть рассмотреть точку пересечения прямой BC и окружности, описанной около треугольника AKN, и доказать, что эта точка является искомой точкой M.

Способ III (*Н. Уваровский*). Проведем AN и AK — касательные к данным окружностям (рис. 4). Докажем, что окружность, проходящая через точки A, N и K, — искомое ГМТ. Рассмотрим случай, когда секущая BC не пересекает отрезок KN (второй случай рассматривается аналогично). Без ограничения общности можно считать, что $AB > AC$.

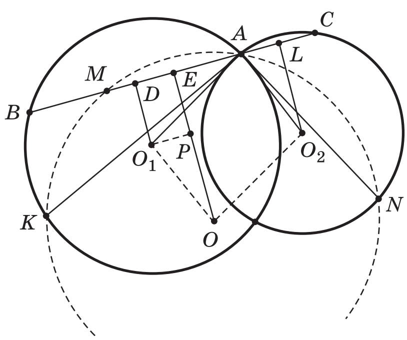


Рис. 4

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника AKN, O_1 и O_2 — центры данных окружностей. Опустим перпендикуляры O_1D, OE и O_2L на отрезок BC. Тогда $AB = 2AD$, $AM = 2AE$, $AC = 2AL$. Заметим, что $AO_2 \perp AK$ (радиус перпендикулярен касательной) и $OO_1 \perp AK$ (линия центров окружностей перпендикулярна общей хорде), следовательно, $AO_2 \parallel OO_1$. Аналогично, $AO_1 \parallel OO_2$. Таким образом, AO_1OO_2 — параллелограмм и $OO_1 = AO_2$.

Проведем перпендикуляр O_1P к отрезку OE. Поскольку $OO_1 \parallel AO_2$ и $OE \parallel O_2L$, то $\angle O_1OE = \angle AO_2L$, следовательно, прямоугольные треугольники O_1PO и ALO_2 равны по гипотенузе и острому углу, откуда $O_1P = AL$, то есть $AL = DE$. Тогда

$$AB - AC = 2AD - 2AL = 2(AD - DE) = 2AE = AM,$$

следовательно, точка M однозначно определяется разностью векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Способ IV (*А. Аскеров. и Г. Габибулаев; сходная идея решения — у Л. Аржанцевой*). Рассмотрим случай, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ направлены в разные стороны (второй случай рассматривается аналогично). Без ограничения общности можно считать, что $AB > AC$. Построим параллелограмм AO_1OO_2 (рис. 5).

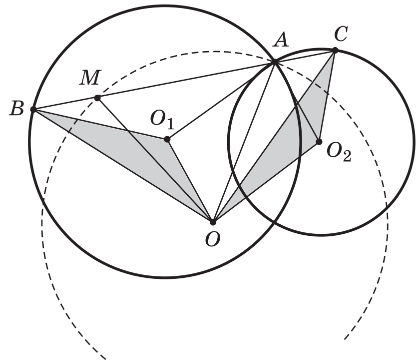


Рис. 5

Докажем, что вершина O этого параллелограмма лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, а значит, и к отрезку AM. Рассмотрим треугольники BOO_1 и COO_2. В этих треугольниках $BO_1 = AO_1 = OO_2$, $CO_2 = AO_2 = OO_1$. Пусть

$$\angle BAO_1 = \angle ABO_1 = \alpha,\ \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = \beta.$$

Тогда

$$\angle BO_1A = 180° - 2\alpha,\ \angle CO_2A = 180° - 2\beta,$$

$$\angle O_1AO_2 = 180° - (\alpha + \beta),\ \angle AO_1O = \angle AO_2O = \alpha + \beta.$$

Отсюда следует, что

$$\angle BO_1O = 360° - \angle BO_1A - \angle AO_1O = 180° - \beta + \alpha,$$

$$\angle CO_2O = \angle CO_2A + \angle AO_2O = 180° - \beta + \alpha.$$

Таким образом, треугольники BOO_1 и COO_2 равны. Значит, равны их соответствующие стороны OB и OC. Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезкам BC и AM, то точка M принадлежит окружности с радиусом OA.

Комментарий. Многие участники конкурса решали эту задачу аналитически. Способы решения, в которых использовалась декартова система координат, похожи, отличие состоит только в выборе системы координат и в способах доказательства того, что координаты точки M удовлетворяют уравнению окружности.

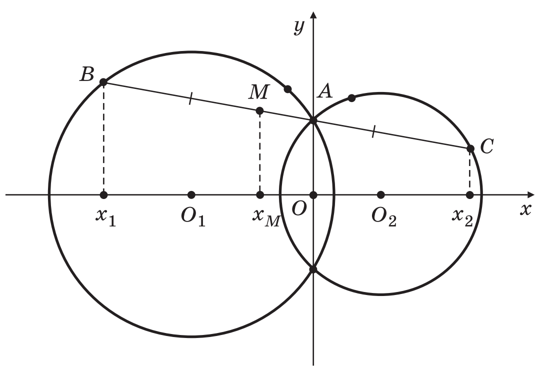


Рис. 6

Способ V (*С. Афанасьева*). Введем декартову систему координат так, как это показано на рисунке 6 (ось Ox совпадает с линией центров окружностей).

Пусть $O_1(b;\ 0)$ и $O_2(c;\ 0)$ — центры данных окружностей, $A(0;\ a)$. Тогда радиусы окружностей:

$$r_1=\sqrt{a^2+b^2},\ \ r_2=\sqrt{a^2+c^2}.$$

Запишем уравнения данных окружностей:

$$(x-b)^2+y^2=a^2+b^2 \text{ и } (x-c)^2+y^2=a^2+b^2.$$

Уравнение прямой BC: $y = kx + a$ (если прямая не совпадает с осью Oy, то есть не содержит общую хорду данных окружностей).

Решив две системы уравнений, найдем координаты точек $B(x_1;\ y_1)$ и $C(x_2;\ y_2)$:

$$x_1=2\cdot\frac{b-ak}{1+k^2},\ \ y_1=2k\cdot\frac{b-ak}{1+k^2}$$

и

$$x_2=2\cdot\frac{c-ak}{1+k^2},\ \ y_2=2k\cdot\frac{c-ak}{1+k^2}.$$

Пусть $M(x_M;\ y_M)$, тогда

$$x_M=x_1+x_2=2\cdot\frac{c+b-2ak}{1+k^2},\ \ y_M=kx_M+a.$$

Выразим из последнего уравнения коэффициент k и подставим его в уравнение для x_M:

$$x_M=2\cdot\frac{c+b-2a\dfrac{y_M-a}{x_M}}{1+\left(\dfrac{y_M-a}{x_M}\right)^2}.$$

Преобразовав, получим:

$$x_M^2+(y_M-a)^2=2(b+c)x_M-4a\,(y_M-a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_M^2-2(b+c)x_M+(b+c)^2+(y_M-a)^2+4a\,(y_M-a)+(2a)^2=$$
$$=(b+c)^2+4a^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x_M-(b+c))^2+(y_M+a)^2=(b+c)^2+4a^2.$$

Таким образом, получено уравнение окружности с центром в точке $(b + c;\ -a)$ и радиусом $\sqrt{(b+c)^2+4a^2}$. Поскольку мы исключили из рассмотрения случай, когда прямая BC совпадает с осью Oy, то осталось проверить, что точка с координатами $(0;\ -3a)$ принадлежит полученной окружности. Действительно, равенство $(b + c)^2 + (-3a + a)^2 = (b + c)^2 + 4a^2$ выполняется. Отметим, что $O(b + c;\ -a)$ является четвертой вершиной параллелограмма O_1AO_2O.

Комментарий. Задачу можно было решить, используя также полярную систему координат.

Способ VI (*А. Перегудова и В. Перегудов, похожее решение у И. Рочева*). Пусть O и O_1 — центры данных окружностей. Проведем к ним касательные AP и AL (рис. 7). Пусть $\angle PAL=\alpha$, а радиусы окружностей равны a и b.

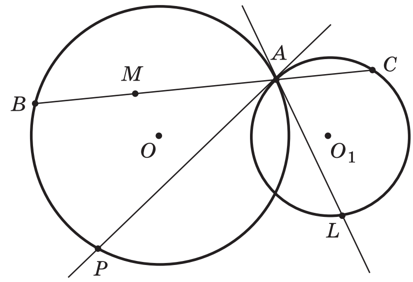


Рис. 7

Тогда в полярной системе координат с полюсом A и осью AP уравнение первой окружности: $r(\varphi)=2a\sin\varphi$, а уравнение второй окружности: $r_1(\varphi) = 2b\sin(\alpha-\varphi)$ (это уравнение можно получить, например, из теоремы синусов, рис. 8).

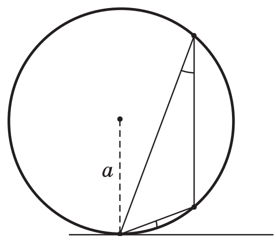


Рис. 8

При фиксированном значении φ приведенные уравнения задают точки, лежащие на одной прямой. Следовательно, уравнение искомой кривой в рассматриваемой полярной системе координат имеет следующий вид: $R(\varphi) = r(\varphi) + r_1(\varphi) = 2a\sin\varphi + 2b\sin(\alpha-\varphi)$. Преобразуем:

$$R(\varphi)=2a\sin\varphi+2b\sin\alpha\,\cos\varphi-2b\cos\alpha\,\sin\varphi=$$

$$=\sin\varphi\,(2a-2b\cos\alpha)+\cos\varphi\,(2b\sin\alpha)=$$

$$=\sqrt{A^2+B^2}\,\sin(\gamma+\varphi),$$

где $A=2a-2b\cos\alpha$, $B=2b\sin\alpha$, $\cos\gamma=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$,

$\sin\gamma=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Полученное уравнение – это уравнение окружности, проходящей через точку A, следовательно, искомое ГМТ — окружность, проходящая через точку A с диаметром $\sqrt{A^2+B^2}$.

Критерии проверки: 10 баллов — полное обоснованное решение; 5 баллов — приведено в целом верное геометрическое решение, но некоторые ключевые равенства приведены без доказательства, либо приведено полное решение, но только для одного случая (когда точки B и C расположены по разные стороны от точки

A или по одну сторону от точки *A*) и потому в ответе получена не окружность, а дуга окружности; 3 балла — приведено аналитическое решение, в завершающей стадии которого есть ошибка или оно не доведено до конца; 2 балла — приведен только верный ответ.

Задача 5. 16.

Один из возможных примеров расположения 16 диагоналей смотри на рисунке 9.

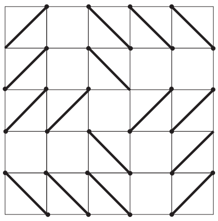


Рис. 9

Докажем, что нельзя провести хотя бы 17 диагоналей. Квадрат 5×5 содержит ровно 36 узлов сетки, при этом концами каждой из диагоналей являются два узла сетки. Пусть удалось провести 17 или более диагоналей, тогда свободными остались не более двух узлов.

Рассмотрим квадрат 3×3, расположенный в центре квадрата 5×5, и его «каемку», шириной в одну клетку (рис. 10). Диагонали, проведенные в «каемке», делятся на два вида:

а) диагонали, один из концов которых лежит на границе квадрата 3×3, а другой — на границе квадрата 5×5;

б) диагонали, оба конца которых лежат на границе квадрата 5×5 («угловые» диагонали, отсекающие вершины исходного квадрата).

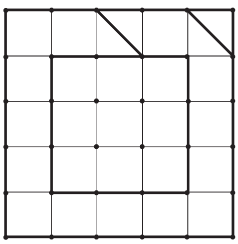


Рис. 10

На границе квадрата 3×3 лежат 12 узлов сетки, а на границе квадрата 5×5 — 20 узлов. По предположению, у нас осталось не более двух свободных узлов, значит, по крайней мере 18 узлов на границе большого квадрата задействованы. Следовательно, «угловых» диагоналей проведено не менее трех. Тогда соответствующие им три вершины внешнего квадрата не задействованы. Противоречие.

Критерии проверки: 10 баллов — полное обоснованное решение; 5 баллов — верный пример и начало оценки (что-то сформулировано, но не доказано, либо в переборном решении рассмотрены не все случаи); 4 балла — приведена только верная оценка либо приведен только верный пример.

6. Уравнение. (*Наиболее полный анализ приведенного «решения» прислали Л. Аржанцева и В. Замараев.*) Предложенное «решение» основывается на трех утверждениях:

а) Уравнение $f(f(x)) = x$ равносильно уравнению $f(x) = f^{-1}(x)$.

б) Если графики двух взаимно обратных функций пересекаются, то точки их пересечения лежат на прямой $y = x$.

в) Из уравнения $f(f(x)) = x$ следует уравнение $f(x) = x$.

Каждое из этих утверждений ложно. Обоснуем это.

1. Утверждение выполняется только для обратимых функций. В данном случае функция $f(x) = x^2 + 2x - 5$ обратимой не является (существуют различные значения аргумента, которым соответствуют одинаковые значения функции).

2. Точки пересечения графиков взаимно обратных функций могут не лежать на прямой $y = x$, а быть симметричными относительно этой прямой. Например (*Н. Авилов*): рассмотрим взаимно обратные функции $f(x) = -x^3$ и $g(x) = -\sqrt[3]{x}$, графики которых имеют три точки пересечения: (0; 0); (1; –1); (–1; 1).

Комментарий. Некоторые участники конкурса приводили в качестве контрпримеров функции вида $y = -x + b$, которые совпадают с обратными к ним. Существует также хрестоматийный пример взаимно обратных функций $f(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $g(x) = \log_{\frac{1}{16}} x$, графики которых пересекаются в трех точках, одна из которых лежит на прямой $y = x$, а две другие: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$. Отметим также, что несложно доказать следующее утверждение: если графики взаимно обратных возрастающих функций пересекаются, то их точки пересечения лежат на прямой $y = x$.

3. Как будет показано ниже, данное уравнение имеет корни, отличные от корней уравнения

$$x^2 + 2x - 5 = x.$$

Комментарий. Отметим, что обратное утверждение является верным:

$$f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(f(x)) = x.$$

Поэтому корни уравнения, полученные в «решении», действительно являются корнями исходного уравнения, но не составляют все множество корней, то есть приведенный в условии «ответ» также неверен.

Приведем два основных способа решения данного уравнения.

Способ I. Если x_0 является корнем уравнения $f(x) = x$, то x_0 является и корнем уравнения $f(f(x)) = x$, поэтому

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ — корни данного уравнения. Для того, чтобы найти остальные корни, приведем исходное уравнение к виду: $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10 = 0$ (раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые). Многочлен, полученный в левой части уравнения, разделим на трехчлен $x^2 + 2x - 5$ в столбик. Получим трехчлен x^2+3x-2, корнями которого являются числа $\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$; $\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Способ II. Пусть $x^2+2x-5=y$, тогда $y^2+2y-5=x$.

Получим систему уравнений $\begin{cases}x^2+2x-5=y,\\ y^2+2y-5=x.\end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе и преобразуем:

$$x^2-y^2+3x-3y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ y=-x-3.\end{array}\right.$$

Подставив полученные выражения в любое из уравнений системы, получим совокупность двух квадратных уравнений. Решив квадратные уравнения, получим корни, приведенные выше.

Критерии проверки: по 2 балла за каждую из трех ошибок, найденную в «решении»; 4 балла — за собственное верное решение. Итого, максимальный балл — 10.

7. Пятиугольник. Утверждение задачи верно, но в приведенном «решении» содержится ошибка, а именно, неверно используется индукционный переход. Действительно, пусть, например, для $n = 4$ выполнялось условие задачи: каждый рыцарь имел двух друзей, сидящих рядом, и врага, сидящего напротив. Удалив одного из них за дверь, мы получим, что для двух рыцарей условие не выполняется, так как у них осталось по одному другу, то есть оставшихся трех рыцарей рассадить требуемым образом нельзя.

Приведем *один из возможных способов* решения задачи *(С. Буфеев)*.

Рассадим всех рыцарей за столом в произвольном порядке. Если слева и справа от каждого рыцаря сидят его друзья, то задача решена. В противном случае рассмотрим какую-либо пару врагов, сидящих рядом. Обозначим их A и B и для определенности предположим, что A сидит слева от B (рис. 11).

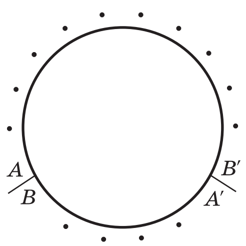


Рис. 11

Поскольку у рыцаря A не менее $\dfrac{n}{2}$ друзей, а у рыцаря B — не более $\dfrac{n}{2}-2$ врагов (не считая рыцаря A), то найдется такая пара сидящих рядом рыцарей A' и B' (A' сидит слева от B'), что A' дружит с A, а B' дружит с B. Пересадим в обратном порядке всех рыцарей, сидящих между A и B'. Тогда A будет сидеть рядом со своим другом A', B — рядом со своим другом B', а для остальных пересаженных рыцарей поменяются местами левый и правый соседи. Общее количество враждующих пар при этом уменьшится. Применяя последовательно указанное рассуждение к каждой паре врагов, сидящих рядом, добьемся искомого.

Комментарий. Отметим, что сформулированное в условии задачи утверждение известно в теории графов как теорема Дирака (на что и обратили внимание многие участники конкурса). Будем рассматривать рыцарей как точки на плоскости и соединять отрезками тех рыцарей, которые являются друзьями. Тогда в получившемся графе каждая вершина имеет степень не менее чем $\dfrac{n}{2}$, и теорема Дирака утверждает, что в таком графе найдется гамильтонов цикл (то есть замкнутый путь, проходящий по всем вершинам и содержащий каждую вершину ровно один раз). Доказательство теоремы Дирака на языке теории графов можно найти, например, в книге Р. Уилсона «Введение в теорию графов».

Критерии проверки: 5 баллов за найденную ошибку; 5 баллов — за собственное верное решение. Итого, максимальный балл — 10.

8. Рыцари. (*Наиболее полный анализ «решения» прислали С. Буфеев и Т. Соколова. Приведем выдержки из их работ.*)

1. Неверно, что «искомая точка лежит на отрезке FE». Если бы это было так, то подобное рассуждение можно было бы провести, заменив вершину E на любую другую вершину данного пятиугольника. Тогда в одной точке должны пересечься пять отрезков, каждый из которых соединяет вершину пятиугольника с точкой пересечения двух диагоналей, которые попарно соединяют остальные четыре вершины.

Несложно построить пятиугольник, для которого это не так (например, рис. 12)

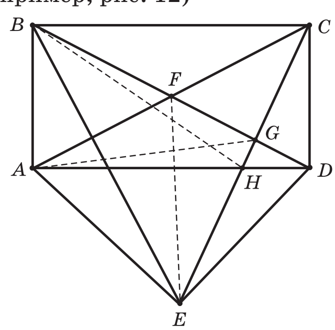


Рис. 12

2. Неверно также, что «искомая точка лежит внутри угла AFD, образованного диагоналями AC и BD», поэтому вывод о том, что «точка минимума должна лежать внутри пятиугольника, образованного пятью диагоналями исходного пятиугольника», также неверен.

Для того, чтобы построить контрпример, необходимо предварительно доказать, что искомая точка O либо совпадает с одной из вершин выпуклого пятиугольника, либо для нее выполняется равенство $\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1}+\overline{OD_1}+\overline{OE_1}=\bar{0}$, где каждое слагаемое — единичный вектор, направленный от O к соответствующей вершине пятиугольника $ABCDE$. Это можно получить либо пользуясь «механической» интерпретацией, либо с помощью аппарата математического анализа. Из аналогичных соображений доказывается, что если точка O существует, то она единственная.

Построим контрпример. Для этого выберем произвольную точку O на плоскости и построим единичный вектор $\overline{OE_1}$. Затем построим единичные векторы $\overline{OA_1}$ и $\overline{OD_1}$ так, чтобы

$$\angle E_1OA_1=\angle E_1OD_1=\pi-\arccos\frac{1}{6},$$

и единичные векторы $\overline{OB_1}$ и $\overline{OC_1}$ так, чтобы

$\angle E_1OB_1=\angle E_1OC_1=\pi-\arccos\frac{1}{3}$ (точки A_1 и B_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой OE_1, а точки C_1 и D_1 — в другой, рис. 13).

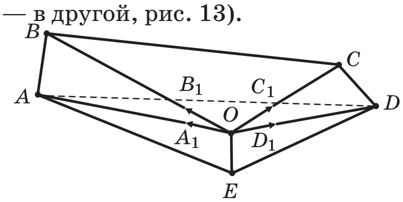


Рис. 13

Сумма построенных векторов равна $\bar{0}$. Действительно, сумма их ортогональных проекций на направление OE_1 равна

$$1+\cos\angle E_1OA_1+\cos\angle E_1OB_1+\angle E_1OC_1+\angle E_1OD_1=0,$$

и сумма их ортогональных проекций на направление, перпендикулярное OE_1, также равно нулю (из симметрии).

Зададим расположение вершин пятиугольника $ABCDE$. Пусть точка E совпадает с E_1. Точки B и C выберем произвольно на лучах OB_1 и OC_1 соответственно. Точки A и D выберем на лучах OA_1 и OD_1 так, чтобы точки A и O лежали в разных полуплоскостях относительно прямой BE, а точки D и O — в разных полуплоскостях относительно прямой CE, и так, чтобы $ABCDE$ был выпуклым пятиугольником. В построенном пятиугольнике искомая точка минимума либо совпадает с одной из его вершин, либо совпадает с точкой O. В любом случае точка минимума лежит вне «диагонального» пятиугольника. (Точка O не может лежать внутри «диагонального» пятиугольника, так как точки O и E лежат в одной полуплоскости относительно диагонали AD.)

3. Даже если в некотором пятиугольнике P точка минимума действительно принадлежит пятиугольнику P_1, образованному его диагоналями, то эта точка не обязана являться точкой минимума для нового пятиугольника P_1.

Комментарий. Можно также привести численный пример (что и сделано в работе Т. Соколовой), но из-за недостатка места мы его опускаем.

4. Единственным утверждением, которое *может быть верным* в приведенном «решении», является высказывание о том, что последовательность пятиугольников, образованных диагоналями, имеет предельную точку. Но для доказательства этого необходимо, чтобы последовательность диаметров этих пятиугольников стремилась к нулю, что совсем неочевидно.

Из всего сказанного выше очевидным образом вытекает, что приведенный «ответ» также неверен. Более того, известно, что задача не имеет точного решения, то есть в общем случае искомую точку минимума (так называемую точку Торричелли) в пятиугольнике с помощью циркуля и линейки построить нельзя. Однако можно построить итерационный процесс (*например, Т. Соколова описала итерационный процесс, основанный на методе Франка–Вульфа*).

Отметим также, что невозможность построения точки минимума при помощи циркуля и линейки связана с тем, что уравнение пятой степени в общем виде нельзя решить в радикалах. Поясним это более подробно, используя работу С. Буфеева.

Заметим, что внутри выпуклого пятиугольника мы ищем точку O такую, что $\vec{z}_1+\vec{z}_2+\vec{z}_3+\vec{z}_4+\vec{z}_5=\vec{0}$, где векторы $\vec{z}_1$, , …, $\vec{z}_5$ направлены из точки O к вершинам пятиугольника и равны по модулю (поэтому будем считать, что $\left|\vec{z}_k\right|=1$, где $k = 1, …, 5$). Поместим пятиугольник в комплексную плоскость, совместив точку Торричелли с началом координат (рис. 14).

Рис. 14

Тогда можно записать, что $z_1+z_2+z_3+z_4+z_5=0$.

Таким образом, числа z_1, ..., z_5 являются решениями уравнения $z^5 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, где $|d| = |z_1z_2z_3z_4z_5| = 1$ (коэффициент при z^4 равен 0 по теореме Виета). Поскольку алгебраическое уравнение пятой степени в общем виде невозможно решить в радикалах, то можно говорить лишь о классификации выпуклых пятиугольников в зависимости от положения в них точки Торричелли (то есть в зависимости от параметров a, b, c и d рассмотренного уравнения).

Рассмотрим несколько частных случаев:

а) уравнение $z^5 = 1$, решения которого $e^{\frac{2\pi k}{5}i}$, где $k = 1, \ldots, 5$ (рис. 15);

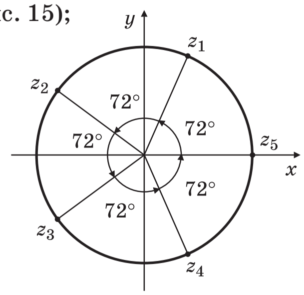


Рис. 15

б) уравнение $(z^3 + 1)(z^2 + 1) = 0$, распадающееся на совокупность двух уравнений. По теореме Виета $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ и $z_4 + z_5 = 0$, то есть сумма векторов $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$ и $\vec{z}_3$ равна нулю и сумма векторов $\vec{z}_4$ и $\vec{z}_5$ равна нулю (рис. 16).

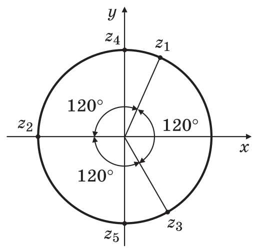


Рис. 16

Рассмотрим один из пятиугольников, соответствующий последнему случаю (рис. 17). В этом пятиугольнике искомая точка O лежит на диагонали AD, а не внутри «диагонального» пятиугольника.

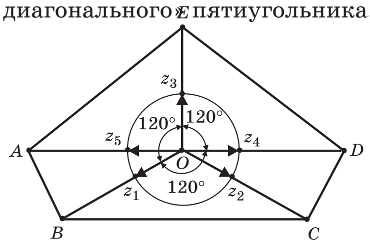


Рис. 17

Критерии проверки: до 10 баллов за найденные ошибки; до 10 баллов — за собственное верное исследование. Итого, максимальный балл — 20.

За выполнение задания 10 можно было получить

ИНФОРМАЦИЯ

Современные тенденции в оценке качества школьного математического образования

Всероссийская научно-методическая конференция. 27–28 марта 2008 г., г. Саратов

Основные темы

• Новые научно-методические подходы к оценке учебных достижений школьников.

• Региональная модель системы оценки качества образования: опыт регионов.

• ЕГЭ по математике: опыт, анализ, суждения.

• Государственная итоговая аттестация в 9-м классе: организационные и содержательные аспекты.

• Роль УМК нового поколения в повышении уровня математической подготовки учащихся.

• Внедрение в учебный процесс современных образовательных технологий как условие повышения качества школьного математического образования.

Приглашаем к сотрудничеству и участию в конференции всех заинтересованных лиц. Всю интересующую информацию по проведению и организации конференции можно получить на сайте института www.saripkro.ru

Контакты

Адрес: 410030, г. Саратов, ул. Большая Горная, д. 1, Саратовский институт повышения квалификации и переподготовки работников образования, кабинет № 20 (кафедра математического образования).

Электронный адрес: kmo06@mail.ru, ergleev@mail.ru

Телефон: (8452) 28-25-24 (кафедра математического образования: Костаева Татьяна Васильевна, Эргле Евгения Викторовна).

Факс: (8452) 28-23-26.

Шеф-редактор С. Островский
Главный редактор Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель ООО «Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя: ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (499)249 3138
Отдел рекламы: (499)249 9870
Редакция газеты «Математика»: тел.: (499)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru