Летние тематические номера

№ 10. ***Методобъединение учителей математики***

Несколько лет В.А. Симановская руководила работой методического объединения учителей математики московской школы № 52. За это время ею было организовано и проведено несколько тематических семинаров. Это большая работа, которая позволила объединить учителей школы, создать единую методическую систему, отвечающую специфике школы и интересам учащихся, обеспечить высокий уровень математической подготовки учащихся. Материалы одного из таких семинаров — «Уравнения. Неравенства» мы и публикуем в этом номере.

№ 11. ***Углубленка, 8–9 классы***

Программа углубленного изучения математики, тематическое планирование и контрольные работы по учебнику Н.Я. Виленкина и др., экзаменационные работы последних лет, билеты для устного экзамена по геометрии и др.

№ 12. ***Математические соревнования***

Математические регаты, карусели, драки, покер и прочие математические развлечения соревновательного характера, уже хорошо известные и новые, появившиеся совсем недавно. В номере вы прочтете о технологии их организации и проведения, правилах, а также найдете подборки вариантов заданий.

№ 13. ***Проектная деятельность***

Метод проектов все чаще используется в учебном процессе. Что такое «проект по математике»? В чем его плюсы и минусы? Как организовать работу? В каких классах? Какие темы предложить учащимся? Ответы на эти и многие другие вопросы вы найдете в этом номере газеты.

№ 14. ***Технологии обучения математике***

Технология учебных циклов, УДЕ, развивающее обучение и пр. Словосочетание «образовательная технология» давно стало привычным для учительского слуха. Уже никого не удивляют попытки выявить технологические элементы в такой сугубо творческой сфере, как труд учителя, и организовать их в единую систему. Поговорим о тех технологиях, которые наиболее популярны у учителей математики.

№ 15. ***Компьютер на уроке математики***

Новые информационные технологии активно входят не только в нашу жизнь, но и в образовательный процесс. Все чаще на столе учителя можно увидеть компьютер. Что дает он учителю? В чем его достоинства? Как научиться работать и ориентироваться в существующих программных продуктах? На страницах этого номера своим опытом поделятся учителя.

В ЭТОМ ВЫПУСКЕ

ВНИМАНИЕ, АНОНС!

Читайте в № 3 и № 4 газеты «Математика»

Тема № 3: Блиц-опрос

Встречали ли вы когда-либо тест «на припоминание»? Проводится он в начале урока, кроме собственно проверки знаний, он помогает ребятам настроиться на работу, вспомнить основные формулы и факты. А тест «на соответствие»? Все ли ваши учащиеся могут установить соответствие между функцией, заданной аналитически, и ее графиком, между разными формами записи числа? Итак, тест прекрасно подходит для блиц-опроса.

Тема № 4: Экзамен для учебников

Утвержден федеральный перечень учебников на 2008/2009 учебный год. Все ли учебники, которыми пользуется учитель математики, прошли экспертизу? Что думает по этому поводу академик В.А. Васильев, отвечающий в РАН за экспертизу учебников по математике.

Продолжается публикация статей из циклов:

Ю. Садовничий
Решаем конкурсные задачи

Е. Потоскуев
Рекомендации по изучению стереометрии

#19

Электронный информационный спутник газеты «Математика»

Третий заочный конкурс учителей математики

В третий раз мы открываем год очередным заочным творческим конкурсом учителей математики. Конкурсом, в котором учитель может проверить свои профессиональные качества. Для тех, кто еще не знаком с конкурсом, скажем, что проводится он газетой «Математика» совместно с Московским центром непрерывного математического образования. В № 1/2007 опубликованы условия и задания прошлогоднего конкурса, а в № 21 можно найти решения этих задач. Напомним, что победители заочного тура приглашаются в Москву для участия в очном туре, о результатах 2007 года также читайте в № 21/2007.

Что требуется от участников конкурса? Обычные учительские навыки — уметь решать задачи и находить ошибки в решениях.

Что дает участие в конкурсе? Все участники конкурса, решившие хотя бы одну задачу, получат свидетельства участника. А победители конкурса, как и в предыдущие годы, будут награждены дипломами газеты «Математика» и учебно-методической литературой по математике. Кроме того, победители традиционно будут приглашены к участию в очном конкурсе или интернет-туре конкурса, которые пройдут в Москве в сентябре 2008 года. Заметим, что у нашего конкурса уже есть постоянные участники.

Что нужно делать? Вам предлагается выполнить 8 заданий, разбитых на два блока: математический (задания № 1–5) и методический (задания № 6–8). Задания 9 и 10 выполнять необязательно, но желательно.

Работы с пометкой «На конкурс» следует высылать в редакцию газеты по адресу: редакция газеты «Математика», Издательский дом «Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165. Срок отправки работы — до **15 мая 2008 года** (по почтовому штемпелю).

В работе необходимо указать: фамилию, имя, отчество; домашний адрес, адрес электронной почты (если есть); название учебного заведения, в котором вы работаете, а также среднюю недельную нагрузку в этом учебном году. Допускаются к участию и коллективные работы.

Всем участникам конкурса будет обеспечена анонимность участия и объективность проверки.

Приглашаем вас к участию в конкурсе и желаем успеха!

I. Решите задачи

1. В четырехэтажном доме по две квартиры на каждом этаже. Дом освещается восемью лампочками: одна над подъездом, на улице, четыре — на площадках каждого этажа и еще три — на площадках между этажами. За освещение дома надо ежемесячно платить 9600 рублей. Сколько должны платить жители каждой квартиры, если они оплачивают освещение только своего и нижних этажей (то есть каждый платит только за те лампочки, светом которых пользуется)?

2. Решите уравнение $3 \cdot 2^{x+2} = 7x + 17$.

3. Существует ли многогранник, у которого:

а) нет трех граней с одинаковым количеством ребер;

б) все грани имеют различное количество ребер?

4. В остроугольном треугольнике ABC D — середина стороны AC, H — ортоцентр (точка пересечения высот). Прямая, проходящая через точку H перпендикулярно отрезку DH, пересекает стороны AB и BC в точках соответственно E и F. Докажите, что $HE = HF$.

5. Имеется 128 монет, одинаковых по виду, но попарно различных по весу. Они разложены на две стопки по 64 монеты, причем в каждой стопке их веса упорядочены по возрастанию. За какое наименьшее количество взвешиваний (на чашечных весах без гирь) можно гарантированно найти 64-ю по весу монету из всех имеющихся?

II. Найдите ошибку

В предложенных текстах могут содержаться математические ошибки (как в утверждениях, так и в ответах, решениях или доказательствах). Если утверждение неверно — приведите контрпример и найдите ошибки в доказательстве. Если неверно только решение (доказательство) — укажите ошибки и приведите верное решение (доказательство)

6. Ортотреугольники. Пусть H — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC. Докажите, что треугольники ABC и BCH имеют общий центр описанной окружности.

«*Доказательство*». Прежде чем доказывать утверждение теоремы, докажем вспомогательное утверждение.

1. «*Лемма*». Прямые, проходящие через вершины треугольника перпендикулярно соответствующим сторонам ортотреугольника (треугольника, вершинами которого являются основания высот), пересекаются в одной точке.

«*Доказательство леммы*». Пусть AA', BB' и CC' — высоты треугольника ABC, O — центр окружности, описанной около этого треугольника. Докажем перпендикулярность прямых OB и $A'C'$. Пусть $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle AOB = 2\gamma$, $\angle OBA = \angle OAB = 90° - \gamma$.

С другой стороны, из того, что каждый из треугольников $BC'A'$ и $B'AC'$ подобен данному треугольнику, следует, что $\angle AC'B' = \angle BC'A' = \gamma$, поэтому $C'C$ — биссектриса угла C' ортотреугольника $A'B'C'$. Следовательно,

$$\angle A'C'C = \frac{1}{2}\angle A'C'B' =$$

$$= \frac{1}{2}(180° - 2\gamma) = 90° - \gamma = \angle OBA.$$

Так как $CC' \perp AB$, то из полученного равенства углов следует искомая перпендикулярность прямых.

Аналогично доказывается, что $OA \perp B'C'$ и $OC \perp A'B'$, то есть прямые, о которых говорится в условии «леммы», пересекаются в точке O.

2. Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC, в котором H — ортоцентр. Очевидно, что у треугольников ABC и BCH один и тот же ортотреугольник. По доказанной лемме эти треугольники имеют общий центр описанной окружности (поскольку эти центры можно получить как пересечение перпендикуляров к сторонам ортотреугольника из общих вершин B и C), что и требовалось доказать.

7. Корабли. Два корабля идут по морю пересекающимися курсами с постоянными скоростями. В 9 .00 расстояние между ними было 6 миль, в 10.00 — 5 миль, в 11.00 — 2 мили. В какой момент времени расстояние между кораблями наибольшее из возможных?

«*Ответ*». В 8 часов 24 минуты расстояние между кораблями было наибольшим.

«*Решение*». Пусть корабли двигались по прямым a и b, пересекающимся в точке O, и в 9.00 они находились в точках A и B. Пусть также $|OA| = s_1$ (миль), $|OB| = s_2$ (миль), а скорости кораблей равны соответственно v_1 миль в час и v_2 миль в час. Тогда через t часов корабли будут находится в точках A' и B', пройдя v_1t миль и v_2t миль соответственно.

Из треугольника $A'OB'$ по теореме косинусов получим, что

$$|A'B'|^2 = (s_1 \pm v_1t)^2 + (s_2 \pm v_2t)^2 - \\ - 2(s_1 \pm v_1t)(s_2 \pm v_2t)\cos\angle AOB$$

(знаки в скобках учитывают, что корабли могут оказаться и на лучах, дополнительных к OA и OB). Полученное уравнение показывает, что зависимость квадрата расстояния между кораблями от времени является квадратичной функцией.

Пусть ее уравнение $f(t) = at^2 + bt + c$. Выберем в качестве начала отсчета времени 9 часов 00 минут. Тогда из условия задачи следует, что

$$f(0) = c = 36,$$

$$f(1) = a + b + c = 25,$$

$$f(2) = 4a + 2b + c = 4.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} c = 36, \\ a + b + c = 25, \\ 4a + 2b + c = 4, \end{cases} \text{ получим, что } \begin{cases} a = -5, \\ b = -6, \\ c = 36. \end{cases}$$

Таким образом, функция имеет вид $f(t) = -5t^2 - 6t + 36$. Свое наибольшее значение она принимает в точке

$$t_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{5}.$$

Так как $f\left(-\frac{3}{5}\right) > 0$, то в этот же момент времени будет наибольшим и расстояние между кораблями.

8. Подслушанный разговор.

— Даны два целых числа, больших 1. Их сумма не превышает 60. Сумму этих чисел я сообщаю Васе, а произведение — Феде. Можете ли вы угадать исходные числа? — задал вопрос учитель.

— Не могу, — ответил Федя.

— Я это знал заранее, — заметил Вася.

— Тогда я знаю эти числа! — воскликнул Федя.

— Тогда и я их знаю! — сказал Вася.

Ученики смогли правильно назвать задуманные числа. Попробуйте и вы их назвать.

«*Ответ*». 4 и 13.

«*Решение*». Итак, Феде известно произведение натуральных чисел $P = A \cdot B$, а Васе — сумма этих чисел $S = A + B$, причем Федя не может угадать эти числа. Какими могли быть числа, чтобы Федя мог их угадать, зная произведение? Это возможно лишь в том случае, когда P раскладывается на множители единственным образом, например, если числа A и B — простые. Вася утверждает, что он знал заранее, что Федя не сможет угадать. Следовательно, S нельзя представить в виде суммы двух простых чисел.

1. Легко проверить, что любое четное число, не превышающее 60, можно представить в виде суммы двух простых чисел.

Несколько примеров:

$$60 = 23 + 37,\ 58 = 5 + 53,\ 56 = 13 + 43\ldots$$

(придумать остальные примеры предоставляем читателю).

2. $S \neq 3$, поскольку число 3 нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел, больших 1.

3. Очевидно, что нечетное число представимо в виде суммы двух простых чисел только в том случае, если одно из слагаемых равно 2.

Например, число 59 невозможно представить в виде суммы двух простых чисел, поскольку $59 = 2 + 57$, но 57 кратно 3. Число 57 — также нельзя, так как $57 = 2 + 55$.

Возникает вопрос, какие нечетные числа представить можно? Перебором несложно убедиться, что в виде суммы двух простых чисел можно представить следующие числа:

$$55 = 2 + 53,\ 49 = 2 + 47,\ 45 = 2 + 43,$$

$$43 = 2 + 41,\ 39 = 2 + 37,\ 33 = 2 + 31,$$

$$31 = 2 + 29,\ 25 = 2 + 23,\ 21 = 2 + 19,$$

$$19 = 2 + 17,\ 15 = 2 + 13,\ 13 = 2 + 11,$$

$$9 = 2 + 7,\ 7 = 2 + 5,\ 5 = 2 + 3.$$

То есть мы установили, что сумма S не может быть равна 5, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 31, 33, 39, 43, 45, 49, 55.

4. Отметим также, что простые числа p, которые могут входить в Федино произведение только в качестве отдельного множителя (а не в составе другого множителя), таковы, что $2p > 30$.

Среди возможных произведений только два могли быть кратны числу 53. Каждое из чисел $318 = 6 \cdot 53$ и $212 = 4 \cdot 53$ позволяет Феде по произведению восстановить искомые числа, и Вася, зная суммы 57 или 59, не стал бы утверждать, что Федя восстановить числа не сможет.

Аналогично отпадают суммы 35, 37, 41, 47, 51 и 53, поскольку, зная произведения $31 \cdot 4$, $31 \cdot 6$, $37 \cdot 4$, $43 \cdot 4$, $47 \cdot 4$, $47 \cdot 6$, числа A и B также могут быть восстановлены однозначно.

Для дальнейшего рассмотрения остались суммы 11, 17, 23, 27 и 29.

Отметим, что после слов Васи можно утверждать, что сумма чисел A и B не превосходит 29, а следовательно, что наибольший простой множитель, входящий в произведение не превосходит 13.

5. Теперь воспользуемся вторым Фединым утверждением. Найдем, в каком случае, зная, что $P = A \cdot B$, и то, что сумма $S = A + B$ принимает одно из значений 11, 17, 23, 27, 29, Федя мог восстановить числа A и B.

Перебор можно выполнить следующим образом. Записываем эти варианты в один столбец. Возле каждого в строчку выписываем варианты произведений для всех возможных разбиений на сумму двух слагаемых.

Варианты произведений, повторяющиеся в нескольких строках, отмечаем (это те произведения, по которым Федя не смог бы определить числа при своем втором ответе).

Приведем соответствующую таблицу.

Так, если сумма чисел равна 11, то возможные произведения:

$$2 \cdot 9 = 18,\ 3 \cdot 8 = 24,\ 4 \cdot 7 = 28,\ 5 \cdot 6 = 30,$$

однако произведение чисел, равное 30, возможно и при другой сумме чисел ($2 \cdot 15 = 30$, и сумма равна 17). Первые три произведения «уникальны», то есть не могут быть получены при других суммах. Поскольку их больше одного, то мы не сможем однозначно определить эти числа.

Если Федя может указать числа по их произведению, то это произведение должно встречаться только один раз среди произведений слагаемых, составляющих эти числа. Вася может угадать числа по их сумме только в случае, если этим числам соответствует «уникальное» произведение.

Эта сумма равна 17, поскольку остальным суммам не соответствуют «уникальные» произведения. Единственное «уникальное» произведение — это 52.

Проверим, подходят ли эти числа.

Вася знает сумму 17, а Федя — произведение 52. Федя не может определить множители, так как $52 = 4 \cdot 13 = 2 \cdot 26$. Вася знает заранее о невозможности определения чисел Федей, так как 17 не представимо в виде суммы двух простых. Узнав о том, что Вася знает заранее, что у Феди числа составные, Федя анализирует возможные суммы своих сомножителей:

$$4 + 13 = 17,\ 2 + 26 = 28.$$

28 представимо как $23 + 5$ (сумма простых чисел), а 17 — нет. Значит, Федя может назвать числа 4 и 13.

Вася анализирует возможные произведения слагаемых:

$2 \cdot 15 = 30 = 5 \cdot 6$ (сумма 11),
$3 \cdot 14 = 42 = 2 \cdot 21$ (сумма 23),
$4 \cdot 13 = 52$ (сумма «уникальна»),
$5 \cdot 12 = 60 = 3 \cdot 20$ (сумма 23),
$6 \cdot 11 = 66 = 2 \cdot 33$ (сумма 35),
$7 \cdot 10 = 70 = 2 \cdot 35$ (сумма 37),
$8 \cdot 9 = 72 = 3 \cdot 24$ (сумма 27).

Таким образом, Вася также выбирает числа 4 и 13.

III. Задания этого блока выполнять не обязательно

9. Какое из предложенных заданий вам понравилось больше всего?

10. Опишите какой-либо случай из вашей педагогической деятельности, когда вы или ваши ученики допускали неочевидную математическую ошибку (при каких обстоятельствах это было, в чем заключалась ошибка и как вы вышли из этой ситуации).

Таблица

11	$2 \cdot 9 = 18$, $3 \cdot 8 = 24$, $4 \cdot 7 = 28$, $\mathit{5 \cdot 6 = 30}$
17	$\mathit{2 \cdot 15 = 30}$, $\mathit{3 \cdot 14 = 42}$, $4 \cdot 13 = 52$, $\mathit{5 \cdot 12 = 60}$, $\mathit{6 \cdot 11 = 66}$, $\mathit{7 \cdot 10 = 70}$, $\mathit{8 \cdot 9 = 72}$
23	$\mathit{2 \cdot 21 = 42}$, $\mathit{3 \cdot 20 = 60}$, $4 \cdot 19 = 76$, $\mathit{5 \cdot 18 = 90}$, $\mathit{6 \cdot 17 = 102}$, $7 \cdot 16 = 112$, $\mathit{8 \cdot 15 = 120}$, $\mathit{9 \cdot 14 = 126}$, $10 \cdot 13 = 130$, $\mathit{11 \cdot 12 = 132}$
27	$2 \cdot 25 = 50$, $\mathit{3 \cdot 24 = 72}$, $4 \cdot 23 = 92$, $5 \cdot 22 = 110$, $\mathit{6 \cdot 21 = 126}$, $7 \cdot 20 = 140$, $8 \cdot 19 = 152$, $9 \cdot 18 = 162$, $10 \cdot 17 = 170$, $11 \cdot 16 = 176$, $\mathit{12 \cdot 15 = 180}$, $13 \cdot 14 = 182$
29	$2 \cdot 27 = 54$, $\mathit{3 \cdot 26 = 78}$, $4 \cdot 25 = 100$, $\mathit{5 \cdot 24 = 120}$, $6 \cdot 23 = 138$, $7 \cdot 22 = 154$, $8 \cdot 21 = 168$, $\mathit{9 \cdot 20 = 180}$, $10 \cdot 19 = 190$, $11 \cdot 18 = 198$, $12 \cdot 17 = 204$, $13 \cdot 16 = 208$, $\mathit{14 \cdot 15 = 210}$
35	$\mathit{2 \cdot 33 = 66}$, $3 \cdot 32 = 96$, $4 \cdot 31 = 124$, $\mathit{5 \cdot 30 = 150}$, $6 \cdot 29 = 174$, $\mathit{7 \cdot 28 = 196}$, $8 \cdot 27 = 216$, $9 \cdot 26 = 234$, $10 \cdot 25 = 250$, $11 \cdot 24 = 264$, $12 \cdot 23 = 276$, $13 \cdot 22 = 286$, $14 \cdot 21 = 294$…
37	$\mathit{2 \cdot 35 = 70}$, $\mathit{3 \cdot 34 = 102}$, $\mathit{4 \cdot 33 = 132}$, $5 \cdot 32 = 160$, $6 \cdot 31 = 186$, $\mathit{7 \cdot 30 = 210}$, $8 \cdot 29 = 232$, $9 \cdot 28 = 252$, $\mathit{10 \cdot 27 = 270}$, $11 \cdot 28 = 308$…
41	$\mathit{2 \cdot 39 = 78}$, $3 \cdot 38 = 114$, $4 \cdot 37 = 148$, $\mathit{5 \cdot 36 = 180}$, $\mathit{6 \cdot 35 = 210}$, $7 \cdot 34 = 238$, $8 \cdot 33 = 264$, $9 \cdot 32 = 288$…
47	$\mathit{2 \cdot 45 = 90}$, $\mathit{3 \cdot 44 = 132}$, $4 \cdot 43 = 172$, $\mathit{5 \cdot 42 = 210}$, $6 \cdot 41 = 246$, $7 \cdot 40 = 280$, $8 \cdot 39 = 312$…
51	$2 \cdot 49 = 98$, $3 \cdot 48 = 144$, $4 \cdot 47 = 188$, $5 \cdot 46 = 230$, $\mathit{6 \cdot 45 = 270}$, $7 \cdot 44 = 308$…
53	$\mathit{2 \cdot 51 = 102}$, $\mathit{3 \cdot 50 = 150}$, $\mathit{4 \cdot 49 = 196}$, $5 \cdot 48 = 240$, $6 \cdot 47 = 282$, $7 \cdot 46 = 322$…

В. ИШИНА, П. КАМАЕВ,
Москва

Ошибки выпускников при решении задач С1и С2

Каждый год после проведения ЕГЭ по математике члены федеральной предметной комиссии анализируют решения выпускниками разных регионов задач С1–С5. Цели этого анализа различны: выявить типичные ошибки учащихся; оценить действенность критериев оценивания решений; подобрать материал для подготовки экспертов к следующему экзамену; скорректировать и уточнить контрольно-измерительные материалы. Одним из результатов анализа работ выпускников и является эта статья.

Как известно, части 2 и 3 контрольных измерительных материалов (КИМ) ЕГЭ по математике содержат пять заданий с развернутым ответом, при выполнении которых выпускник должен записать свое решение. Первые два из этих заданий относятся к повышенному уровню сложности, т.е. школьные отличники должны продемонстрировать свои умения в применении известных методов решения, но применить их в несколько измененной ситуации. В 2007 г. задание С1 проверяло умение находить точки экстремумов сложных функций, определенных на некотором промежутке, а не на всей числовой прямой. Задание С2 проверяло умение решать уравнения и производить отбор корней уравнения-следствия. Разберем ошибки, допущенные выпускниками при решении этих заданий.

Начнем с **заданий С1**, одно из которых выглядело так:

Найдите точки максимума функции

$$f(x)=\left(7^{\sqrt{1-x}}-2\right)^2-49^{\sqrt{1-x}}+4\cdot 7^{\sqrt{1-x}}+4x^2-0,5x^4.$$

Как видим, функция задана формулой, в записи которой имеются корни. Значит, надо найти область определения функции, упростить ее формулу, после чего с помощью производной, по известному алгоритму, найти точки максимума функции.

Во всех вариантах функции были сконструированы так, что после упрощения получался многочлен четвертой степени, а после дифференцирования — многочлен третьей степени со свободным членом равным нулю. Тем самым поиск нулей производной сводился к вынесению за скобки общего множителя и решению квадратного уравнения. Таким образом, во всех вариантах производная три раза обращалась в ноль, но один из нулей не входил в область определения функции, то есть заведомо не мог быть и точкой экстремума функции.

Для выявления типичных ошибок нами были просмотрены работы выпускников из разных регионов, приступавших к решению этих задач. Лишь в пятой части этих работ содержались верные решения, в них выпускники показали понимание и умение решать поставленную перед ними задачу. Десятая часть выпускников показали верный ход решения, владение применяемым методом, но допустили вычислительную ошибку или описку, из-за которой получили неверный ответ.

Какие же ошибки типичны при решении этой задачи?

Самой типичной ошибкой (ее допустил почти каждый пятый выпускник) является отсутствие важного шага решения — нахождение области определения заданной функции. В ряде работ выпускники сначала упрощали функцию, а потом находили область определения функции, но по упрощенной формуле, что также неверно. В этих случаях эксперт, проверявший работу выпускника, должен был поставить ноль баллов за представленное решение. Происхождение этой ошибки можно объяснить тем, что в наших учебниках большинство функций задается на множестве всех действительных чисел, и на уроках мы, учителя, не уделяем достаточного внимания функциям, область определения которых представляет некоторое подмножество $\boldsymbol{R}$.

Обратим внимание и на оформление работ.

Рассмотрим решение задачи одного из вариантов, где рассматривалась функция вида:

$$f(x)=48x^2-3x^4-9x^3+0,1^{-\lg\left(x^3+8\right)}.$$

Область определения этой функции задается условием $x^3+8>0$, то есть $x>-2$. При этих значениях аргумента функция может быть задана формулой

$$f(x)=-3x^4-8x^3+48x^2+8.$$

А ее производная равна

$$f'(x)=-12x^3-24x^2+96x.$$

Теперь выпускнику нужно найти критические (стационарные) точки функции, то есть решить уравнение

$$-12x^3-24x^2+96x=0.$$

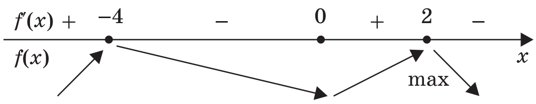
Для этого он делит обе части уравнения на (-12) и получает уравнение, равносильное данному:

$$x^3+2x^2-8x=0.$$

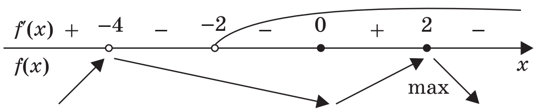
(К сожалению, во многих работах выпускники делят обе части уравнения на $(-12x)$, изменяя при этом производную до неузнаваемости.) Когда же приходит время исследовать знаки производной, выпускник смотрит не на формулу, задающую производную, а на левую часть уравнения, которое он только что решил.

Поэтому следует приучать наших учеников перед исследованием знаков производной записывать ее разложение на множители, тогда в большом числе случаев мы избежим этой ошибки.

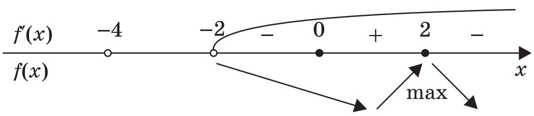
Конечно, все мы, учителя, учим отмечать на координатной прямой всю информацию о нулях и знаках производной и после этого отмечать на ней промежутки монотонности функции. Вот какие рисунки можно было увидеть в работах выпускников при решении этой задачи.



Но (−4) не входит в ОДЗ, поэтому точка максимума $x = 2$.



Так как (−4) не входит в область определения, то точка максимума $x = 2$.



Ответ: $x_{\max} = 2$.

На наш взгляд, верным можно признать лишь последний рисунок, потому что функция определена лишь справа от $x = -2$, и слева от этой точки она не может ни возрастать, ни убывать. И, конечно же, слева от $x = -2$ не следует отмечать и знаки производной этой функции, так как функция там не определена. И говоря о функции, лучше говорить об области ее определения, а не об ОДЗ. Балл за эти «недочеты» не снимался, если ответ был верен.

Другая типичная ошибка выпускников (ее допустила десятая часть от числа всех приступавших к решению этой задачи) состоит в том, что, находя точку максимума (минимума) функции, они указывают в ответе и значение функции в этой точке. Причины, вызывающие появление этой ошибки, тоже понятны. Действительно, графики строят на координатной плоскости, а точка на координатной плоскости имеет две координаты. Вместе с тем учитель должен понимать, что такой ответ может дать только ученик, у которого страдает теоретическая составляющая математической подготовки. То есть этот ученик не различает два понятия: точка максимума (минимума) функции и максимум (минимум) функции. Может быть, с этим положением можно смириться, если это пробел в подготовке слабого ученика, но вряд ли учителю стоит успокаиваться, если такую ошибку допускает выпускник, претендующий на оценку «пять». Так давайте обратим внимание учеников на то, что определения математических понятий нужно знать точно.

Теперь рассмотрим, какие ошибки допустили выпускники при решении второго задания ЕГЭ, ориентированного на выполнение его школьными отличниками. **Задание С2** проверяло умения выпускников решать иррациональные и тригонометрические уравнения. Уравнения, которые были предложены им на экзамене, можно разбить на три группы.

А. Тригонометрические уравнения типа:

$$\sin^2\frac{2x}{5}+6\sin\frac{2x}{5}\sin\frac{x}{5}+9=9\cos^2\frac{x}{5}.$$

Б. Иррациональные уравнения типа:

$$2-3x+x^2=2(x-1)\sqrt{x}.$$

В. Иррациональные уравнения типа:

$$x^2+x=0,5(6-x)+\sqrt{2x^2+3x+2}.$$

Рассмотрим ошибки, допущенные выпускниками при решении уравнений каждой группы.

При решении уравнения ***группы А*** выпускник преобразовывал его к виду $\sin\frac{2x}{5}+3\sin\frac{x}{5}=0.$ Применяя формулу двойного угла (к сожалению, значительная часть решавших не увидели здесь хорошо известную им формулу), выпускник получал уравнение

$$2\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}+3\sin\frac{x}{5}=0.$$

После этого делил обе части уравнения на $\sin\frac{x}{5}$, теряя при этом корни уравнения. Так поступала почти пятая часть выпускников.

При решении уравнений ***группы Б*** следовало разложить на множители левую часть уравнения и затем представить уравнение в виде:

$$(x-1)\left(x-2\sqrt{x}-2\right)=0.$$

Как и при решении уравнения группы А, почти пятая часть выпускников после разложения левой части на множители предпочли «сократить» обе части уравнения на двучлен $(x - 1)$ и тем самым потеряли один из корней уравнения.

Вторая ошибка выпускников при решении этого уравнения состояла в том, что, применяя метод замены переменных и рассматривая второй множитель как квадратный трехчлен относительно новой переменной $y=\sqrt{x}$, выпускники «забыли», что $\sqrt{x}$ принимает лишь неотрицательные значения. Таким образом, четвертая часть выпускников, решавших это уравнение, получили в ответе «посторонний» корень.

Уравнение ***группы В*** рациональнее было решать, вводя новую переменную $y = \sqrt{2x^2 + 3x + 2}$, где $y \geq 0$. Но многие выпускники решали данное уравнение стандартным способом: уединяли радикал и возводили обе части уравнения в квадрат. Тем самым сильно усложнив решение уравнения. Получив уравнение четвертой степени, они подбором находили целочисленный корень и, деля «уголком» или по схеме Горнера, получали квадратное уравнение. Как и при решении уравнения группы Б, почти четверть выпускников не проверили, удовлетворяют ли найденные ими значения переменной исходному уравнению.

Таким образом, основная ошибка при решении уравнения состоит в том, что, «упрощая» уравнение, выпускники заменяют его не равносильным ему уравнением. Это приводит в одних случаях к потере корней (при делении обеих частей уравнения на выражение с переменной), а в других — к приобретению корней (при возведении в квадрат обеих частей уравнения). Наличие подобных ошибок в работах выпускников, имеющих годовую отметку «четыре» или «пять», должно вызвать вопрос и у обучавшего в школе учителя, и у проверяющего решение эксперта:

Можно ли при допущенных учеником указанных ошибках считать, что выпускник в целом усвоил метод решения?

Ответ, по-видимому, отрицателен.

Поскольку в критериях по проверке и оцениванию этих заданий указывается, что 1 балл выставляется лишь в том случае, когда выпускник допустил вычислительную ошибку или описку, которая могла привести его к неправильному ответу. Мы хорошо понимаем, что, сдавая экзамены, ученики волнуются и могут допустить описку или вычислительную ошибку при правильном, пусть даже нерациональном, ходе решения и получить из-за этого неверный ответ. Вот найти ее и должны эксперты. А так как ход решения был верным, то решение оценивается 1 баллом.

Предлагая данный анализ ошибок выпускников, допущенных ими при выполнении заданий С1 и С2 в 2007 году, авторы надеются на то, что в следующем году эти ошибки будут исправлены силами учителей и учащихся.

ПОЛЕЗНЫЕ СОВЕТЫ

Ч. АТАХАНОВА,
Алматы, Казахстан

Многогранное слово

Слово-педагог. Известно, что словом можно окрылить, но можно и ранить человека. Практически в каждом случае при работе со слабыми детьми мы сталкиваемся с *перекрытием восприятия* именно из-за **слова.**

Ко мне обратилась мама шестиклассника с просьбой позаниматься с ее ребенком.

После первого занятия, когда я увидела неплохие способности к восприятию математики, я задала ему вопрос: «Как ты относишься к математике?» — «Не очень. Я тупой в математике», — последовал ответ.

«А кто тебе ЭТО сказал?» — «Никто. Я сам это знаю». И тут включилась мама: «А ну-ка, вспомни, вспомни!» (Она была удивлена: откуда я могла это знать?!) — «Да ЭТО в 5-м классе мне сказал учитель».

Слово, произнесенное *неосторожно*, может, даже и *случайно*, слово, произнесенное ***авторитетом*** (учителем, родителем и др.), для ребенка явилось установкой в его *несостоятельности в математике* и со временем стало его убеждением в собственной «тупости».

Осторожно я продолжила: «Ты знаешь, люди часто ошибаются. Это может произойти и с нами, учителями. И мне кажется, твой учитель ошибся: у тебя есть способности к математике».

В настоящее время этот парень учится на экономическом факультете, хотя на тот момент он думал стать историком, как его родитель.

Считаю, что из лексикона учителя должны быть исключены слова и выражения, которые могут дать установку (иногда долговременную) на перекрытие восприятия: *вечно ничего не видишь, не слышишь, не понимаешь*; *вы необучаемые*. Какой бы ни был ребенок, надо всегда оставлять ему надежду на то, что он может преодолеть любые преграды, если подключит волю.

Слово-понятие. Очень часто ученик начинает отставать от других по причине недопонимания *значения* каких-нибудь слов, встречающихся в задании.

Простой пример: ученик получает задание *вычислить*. Но тут все понятно, и он вычисляет.

Но стоит изменить слова: *«Найдите значение выражения»* — и наш ученик уже спрашивает: «А что тут надо делать?»

Разбираем каждое слово. «Найдите» — понятно? Да.

Слово «выражение» понятно? Да.

Слово «значение»? Не понятно!

Проясняем: Что *значишь* ты в этой жизни? А что *значит* этот пример иными словами? Оказалось, что нужно было просто вычислить.

Поэтому важно разбирать значение слов, малоизвестных детям.

З. ХАБИРОВА, О. МАЛЬЦЕВА,
г. Стрежевой, Томская обл.

Математическая статистика в жизни одного класса

Цели урока:

• обобщение тем «Статистические характеристики», «Сбор и группировка статистических данных», «Наглядное представление статистической информации»;

• демонстрация значимости компьютерной технологии в решении статистических задач.

Оборудование: компьютер, раздаточный материал «Алгоритм работы на компьютере», информационно-раздаточные материалы.

К данному уроку учащиеся заранее готовят информацию:

— сводную ведомость оценок класса за I четверть;
— сводную ведомость оценок класса за II четверть;
— о посещении кружков, секций;
— о заболеваемости учащихся класса;
— о росте учащихся;
— о днях рождения по месяцам.

Ход урока

Сегодня у нас итоговое занятие по курсу «Элементы математической статистики». Тема урока «Математическая статистика в жизни одного класса». В конце урока ответьте на вопрос, почему я предложила такую тему.

Актуализация знаний

Чтобы провести практическую работу, повторим основные понятия, необходимые для решения задач.

1. Чем занимается наука «Математическая статистика»?

2. Какие основные статистические характеристики вы знаете?

3. Дайте определение среднего арифметического.

4. Что называется модой?

5. Сформулируйте определение медианы.

6. Как вы понимаете фразу «Статистика — дизайн информации»?

7. Для того чтобы видеть статистические данные в динамике, как полезно их оформить?

[В виде диаграммы, гистограммы, полигона.]

8. Какие виды таблиц вам известны?

9. Какие виды диаграмм вы знаете?

10. В каких изучаемых вами дисциплинах встречаются диаграммы, гистограммы, полигоны?

Статистика решает задачи, связанные с обработкой и представлением данных, это требует аккуратности, точности и внимательности. Сегодня вы должны обработать, оформить и сделать выводы по решению своих задач на компьютере. Внимательно ознакомьтесь с алгоритмом.

Алгоритм работы

1. Вставить таблицу в документ MS Word.

2. Если возможно по смыслу, то определить следующие характеристики:

а) среднее арифметическое величины;

б) ее моду; в) размах.

Примечание. Для вычисления среднего арифметического можно использовать программу «Калькулятор»: Пуск–Программы–Стандартные–Калькулятор.

3. Построить по таблице:

а) гистограмму; б) полигон; в) круговую диаграмму.

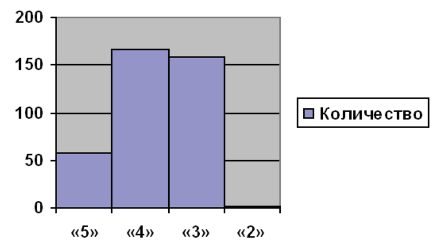
Примечание. Для построения гистограммы можно выполнить следующие команды: Вставка–Рисунок–Диаграмма.

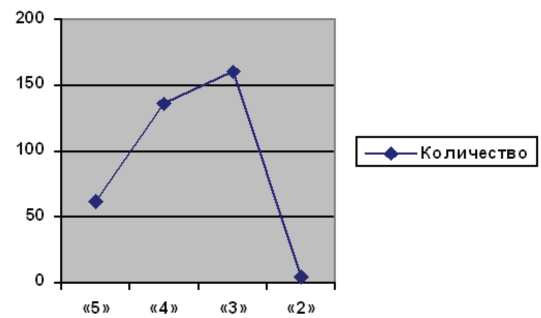
4. Оформить задание.

Примечание. Оформленное задание должно содержать: название темы, вариант задачи; таблицу исходных данных; необходимые вычисления; диаграммы и их названия.

Задача 1. Наша учеба в I четверти. Составьте сводную таблицу оценок по всем предметам за I четверть, есть «5» — 62, «4» — 137, «3» — 160, «2» — 5. Постройте полигон и гистограмму для данной задачи. Вычислите средний балл класса за I четверть. Какая оценка была типичной? (В классе 23 человека.)

Оценка	5	4	3	2
Количество	62	137	160	5



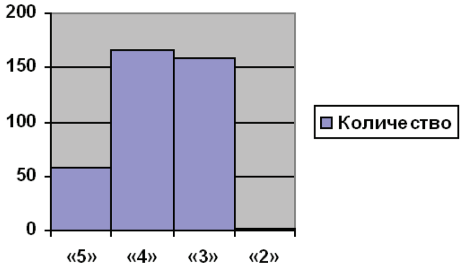


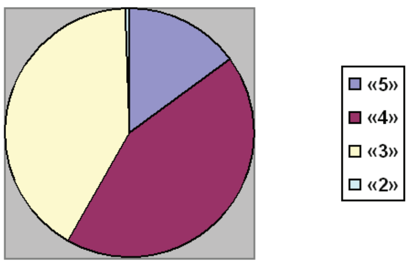
Средний балл равен 3,7.

Типичная оценка: «3».

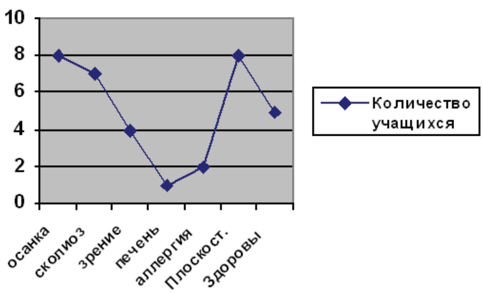
Задача 2. Наша учеба во II четверти. Составьте сводную таблицу оценок по всем предметам за II четверть, если «5» — 58, «4» — 159, «3» — 166, «2» — 2. Постройте гистограмму и круговую диаграмму для данной задачи. Определите средний балл успеваемости за II четверть. Сравните с результатами I четверти.

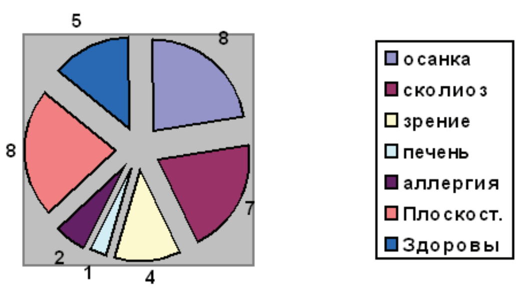
Оценка	5	4	3	2
Количество	58	166	159	2





Задача 3. Здоровье класса. Составьте таблицу «здоровья» учащихся класса, если 8 учащихся страдают нарушением осанки, у семерых обнаружен сколиоз, плохое зрение у четверых, аллергией страдают двое, плоскостопием — 8, один страдает от заболевания печени, и здоровы только пять учащихся. Найдите относительную частоту каждого заболевания. Постройте диаграмму.





Заболевание	Абсолютная частота	Относительная частота
Нарушение осанки	8	0,348
Сколиоз	7	0,304
Нарушение зрения	4	0,174
Заболевания печени	1	0,043
Аллергия	2	0,087
Плоскостопие	8	0,348
Здоровы	5	0,217

Вывод. Большинство учащихся страдают заболеванием опорно-двигательного аппарата.

Задача 4. Мы растем. Заполните интервальную таблицу роста учащихся. Постройте полигон роста, заменив каждый интервал его серединой. Найдите средний рост учащихся.

Рост, см	Частота	Середина интервала
152–155	3	153,5
155–158	1	156,5
158–161	1	159,5
161–164	4	162,5
164–167	5	165,5
167–170	6	168,5
170–173	3	171,5

Задача 5. Свободное время. Составьте таблицу посещаемости кружков, секций, студий, если спортивную секцию посещают 4, кружок «Юный журналист» — 3, «маникюрный» кружок — 3, театральную студию — 2, станцию юных туристов — 1, не посещают кружки и секции — 10.

Кружок	Спортивный	Юных журналистов	Маникюрный	Театральный	Юных туристов	Не посещающих
Количество учащихся	4	3	3	2	1	10

Учащиеся выводят свои работы на печать.

Статистика в нашем классе

В классе 23 человека. Средний рост — 164 см. В основном в классе учатся ребята ростом 168,5 см. Разница в росте между самым низким и самым высоким составляет 21 см. Для учащихся данного класса не характерно заниматься в центрах дополнительного образования. Учатся в основном на оценку «3», хотя средний балл составляет 3,7. Страдают заболеванием опорно-двигательной системы.

Олимпиады, конкурсы, турниры в 2008 году

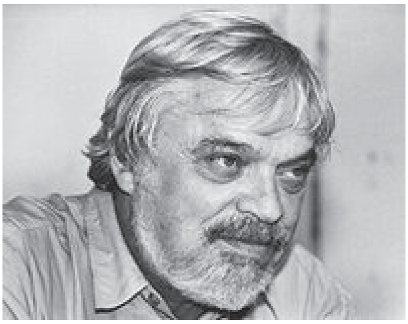
(по состоянию на 7 декабря 2007 года)

Мероприятие	Классы	Дата проведения	Место проведения	Контакты	Предполагаемое участие газеты
Заочный математический конкурс	6–8	В течение года	Москва	(495) 241-12-37 zmk@mccme.ru	
Зимний Турнир Архимеда	6–7	20.01	Москва	(495) 716-29-35 П.В. Чулков chulkov@logic.ru	Разбор задач
Всероссийская научно-техническая конференция-конкурс «Юниор»	10–11	26.01–27.01	Москва	(495) 324-91-15	
Олимпиада по геометрии памяти И.Ф. Шарыгина	8–11	Январь — заочный тур, март — очный тур, июль — финальный тур	Москва (март), Дубна (июль)	(495) 241-12-37 А.А. Заславский	Публикация заданий заочного тура, разбор задач финального тура
Всероссийская научно-практическая конференция «Intel-Авангард»	6–11	Январь	Москва	(495) 362-34-40	
Барнаульский турнир математических боев	8–11	01.02–03.02	Барнаул	Д.Н. Оскорбин oskorbin@yandex.ru grani@asu.ru	
31-й Уральский турнир юных математиков	8–11	15.02–21.02	Киров	(8332) 35-15-03 И.С. Рубанов sms@extedu.kirov.ru www.cdoosh.kirov.ru/kubok/uraltur	Обзор турнира
VIII Школьные Харитоновские чтения	9–11	28.02–02.03	Саров, Нижегородская обл.	(83130) 2-72-98 rh.read@expd.vniief.ru	Обзор
Математическая регата	10	08.03	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
Международный конкурс-игра «Кенгуру»	3–10	20.03	По всем регионам	(812) 233-38-51 А.И. Плоткин kenguru.SP.ru	Разбор задач
Математическая регата	8	16.03	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
Новосибирский турнир математических боев	7–9	27.03–29.03	Новосибирск	А.И. Щетников pythagor@ngs.ru	
Экономико-математическая олимпиада	9–11	Март	Москва	(495) 939-16-06 info@emsch.ru	
Олимпиада по математике и информатике ВМК	8–11	Март	Москва	(495) 335-93-20 Оргкомитет	
Всероссийская олимпиада школьников. IV (федеральный окружной) этап	8–11	Март	По федеральным округам	(495) 408-64-36 Н.Х. Агаханов	
Всероссийская олимпиада школьников. V (заключительный) этап	9–11	Апрель	Не определено	(495) 408-64-36 Н.Х. Агаханов	Информация

Мероприятие	Классы	Дата проведения	Место проведения	Контакты	Предполагаемое участие газеты
Олимпиада мехмата МГУ	8–10	Апрель	Москва	(495) 939-37-39 Оргкомитет	
Весенний Турнир Архимеда	5–6	05.04–06.04	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
Устная олимпиада по геометрии	8–11	13.04	Москва	(495) 241-12-37 olympiads.mccme.ru/ustn	
Всероссийский конкурс юношеских исследовательских работ «Чтения им. В.И. Вернадского»	8–11	14.04–18.04	Москва (ДНТТМ)	(495) 727-08-26 Оргкомитет	Информация
Математическая регата	7	19.04	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
VIII Колмогоровские чтения	9–11	04.05–07.05	Москва (СУНЦ)	(495) 449-38-03 Оргкомитет math@pms.ru	Обзор
Математический фестиваль «Золотое руно»	7–8	28.05–06.06	Пицунда, Абхазия	(861) 215-18-17 И.В. Федоренко crdo-bernoulli.ru	
14-я Международная олимпиада школьников «Туймаада»	8–11	Июль	Якутск	guas@mail.ru guas@ag3200.spb.edu www.guas.info	
Летняя конференция Турнира городов	8–11	Август	Не определено	(495) 241-12-37	
Третий южный математический турнир	6–11	Сентябрь	ВДЦ «Орленок»	(8772) 52-72-50 Д.К. Мамий dmami@yandex.ru	
31-й турнир им. М.В. Ломоносова	6–11	Сентябрь	Москва	(495) 241-12-37 turlom@mccme.ru	
19-й Российский фестиваль юных математиков	8–11	06.10–13.10	Сочи	(861) 215-18-17 И.В. Федоренко fiv@kulannet.ru	Информация
Международный математический Турнир городов	8–11	Октябрь	Москва	(495) 241-12-37 www.mccme.ru/olympiads/turgor	
Математическая регата	9	Октябрь	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
Устная математическая олимпиада	6–7	Ноябрь	Москва	(495) 241-12-37	
Московский открытый турнир математических боев	8–11	Октябрь-декабрь	Москва	(495) 241-12-37 matboi@mccme.ru	
12-й Кубок памяти А.Н. Колмогорова	9–11	Ноябрь-декабрь	Казань	(8332) 35-15-03 И.С. Рубанов www.cdoosh.kirov.ru/kubok/kolmogor	Обзор турнира
32-й Уральский турнир юных математиков	9–11	Ноябрь-декабрь	Не определено	(8332) 35-15-03 И.С. Рубанов sms@extedu.kirov.ru www.cdoosh.kirov.ru/kubok/uraltur	Информация
Математическая регата	11	Декабрь	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
Олимпиада по математике и криптографии	9–11	Декабрь	Москва	(495) 931-34-22 olymp@academy.fsb.ru www.academy.fsb.ru	Разбор задач

IV Олимпиада по геометрии памяти И.Ф. Шарыгина

Заочный тур



В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11-х классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов.

Работа с решениями задач должна быть отправлена простой бандеролью ***не позднее 1 апреля 2008 года*** по адресу: 119002, Москва Г-002, Большой Власьевский пер., д. 11, МЦНМО. На олимпиаду им. И.Ф. Шарыгина.

Все присланные работы будут проверены жюри, а результаты высланы участникам не позднее середины мая 2008 г. Победители заочного тура — учащиеся 8–10-х классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2008 г. в г. Дубна (Московская обл.). Победители заочного тура — выпускники школ будут награждены грамотами оргкомитета олимпиады.

Информация в интернете: www.mccme.ru.

Контактный e-mail оргкомитета: olgeom@mccme.ru.

Рекомендации по оформлению работы

Работа должна быть выполнена в тетради в клетку на русском языке. На обложке тетради необходимо указать следующие сведения: фамилия, имя, отчество; полный почтовый адрес с индексом; телефон, e-mail (если есть); класс; адрес и номер школы; ФИО педагогов (учителя математики и/или руководителя кружка).

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение. Старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения, делая аккуратные чертежи. Если задача на вычисления, в конце ее решения должен быть отчетливо выведен ответ. Пишите аккуратно, ведь вы заинтересованы в том, чтобы вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если вы используете в решении известную теорему или факт, приведенный в школьном учебнике, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт вы имеете в виду). Если же вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Задачи

1. (*8-й класс*) Существует ли правильный многоугольник, в котором ровно половина диагоналей параллельна сторонам?

2. (*8-й класс*) Для данной пары окружностей постройте две концентрические окружности, каждая из которых касается двух данных. Сколько решений имеет задача в зависимости от расположения окружностей?

3. (*8-й класс*) Треугольник можно разрезать на три равных треугольника. Докажите, что один из его углов равен 60°.

4. (*8–9-е классы*) Биссектрисы двух углов вписанного четырехугольника параллельны. Докажите, что сумма квадратов двух сторон четырехугольника равна сумме квадратов двух других сторон.

5. (*8–9-е классы*) Постройте квадрат $ABCD$, если даны его вершина A и расстояния от вершин B и D до фиксированной точки плоскости O.

6. (*8–9-е классы*) На плоскости даны две концентрические окружности с центром в точке A. Пусть B — произвольная точка одной из этих окружностей, C — другой. Для каждого треугольника ABC рассмотрим две окружности одинакового радиуса, касающиеся друг друга в точке K, причем одна окружность касается прямой AB в точке B, другая — прямой AC в точке C. Найдите геометрическое место точек K.

7. (*8–9-е классы*) Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q. Точка C лежит на первой окружности, а прямые CP, CQ вторично пересекают вторую окружность в точках A и B. Докажите, что $AB = PQ$.

8. (*8–11-е классы*) а) Докажите, что при $n > 4$ любой выпуклый n-угольник можно разрезать на n тупоугольных треугольников.

б) Докажите, что при любом n существует выпуклый n-угольник, который нельзя разрезать меньше, чем на n тупоугольных треугольников.

в) На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать прямоугольник?

9. (*9–10-е классы*) Прямые, симметричные диагонали BD четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов B и D, проходят через середину диагонали AC. Докажите, что прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C, проходят через середину диагонали BD.

10. (*9–10-е классы*) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром L. Докажите, что проекции точек B и D на прямые IA и IC лежат на одной окружности.

11. (*9–10-е классы*) Даны четыре точки A, B, C, D. Известно, что любые две окружности, одна из которых проходит через A и B, а другая — через C и D, пересекаются. Докажите, что общие хорды всех таких пар окружностей проходят через одну точку.

12. (*9–10-е классы*) Имеется треугольник ABC. На луче BA отложим точку A_1 так, что отрезок BA_1 равен BC. На луче CA отложим точку A_2 так, что отрезок CA_2 равен BC. Аналогично построим точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 параллельны.

13. (*9–10-е классы*) Дан треугольник ABC. Вневписанная окружность касается его стороны BC в точке A_1 и продолжений двух других сторон. Другая вневписанная окружность касается стороны AC в точке B_1. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N. На луче AA_1 отметили точку P такую, что $AP = NA_1$. Докажите, что точка P лежит на вписанной в треугольник окружности.

14. (*9–10-е классы*) Прямая, соединяющая центр описанной окружности и точку пересечения высот неравнобедренного треугольника, параллельна биссектрисе одного из его углов. Чему равен этот угол?

15. (*9–11-е классы*) Даны две окружности и не лежащая на них точка P. Проведите через P прямую, высекающую на данных окружностях хорды равной длины.

16. (*9–11-е классы*) Даны две окружности. Общая внешняя касательная касается их в точках A и B. Точки X, Y на окружностях таковы, что существует окружность, касающаяся данных в этих точках, причем одинаковым образом (внешним или внутренним). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AX и BY.

17. (*9–11-е классы*) Дан треугольник ABC и линейка, на которой отмечены два отрезка, равные AC и BC. Пользуясь только этой линейкой, найдите центр вписанной окружности треугольника, образованного средними линиями ABC.

18. (*9–11-е классы*) Докажите, что для треугольника со сторонами a, b, c и площадью S выполнено неравенство

$$a^2+b^2+c^2-\frac{1}{2}\left(|a-b|+|b-c|+|c-a|\right)^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

19. (*10–11-е классы*) Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$. Первая окружность имеет центр в вершине A и проходит через D, вторая имеет центр в C и проходит через D. Произвольная окружность с центром B пересекает первую окружность в точках M_1, N_1, а вторую — в точках M_2, N_2. Чему равно отношение $\dfrac{M_1N_1}{M_2N_2}$?

20. (*10–11-е классы*) а) Многоугольник обладает следующим свойством: если провести прямую через две точки, делящие его периметр пополам, то эта прямая разделит многоугольник на два равновеликих многоугольника. Верно ли, что многоугольник центрально симметричен?

б) Верно ли, что любая фигура, обладающая свойством, указанным в пункте «а», центрально симметрична?

21. (*10–11-е классы*) В треугольнике провели серединные перпендикуляры к его сторонам и измерили их отрезки, лежащие внутри треугольника.

а) Все три отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равносторонний?

б) Два отрезка оказались равны. Верно ли, что треугольник равнобедренный?

в) Могут ли длины отрезков равняться 4, 4 и 3?

22. (*10–11-е классы*) а) Все вершины пирамиды лежат на гранях куба, но не на его ребрах, причем на каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

б) Все вершины пирамиды лежат в плоскостях граней куба, но не на прямых, содержащих его ребра, причем в плоскости каждой грани лежит хотя бы одна вершина. Какое наибольшее количество вершин может иметь пирамида?

23. (*10–11-е классы*) В пространстве даны две пересекающиеся сферы разных радиусов и точка A, принадлежащая обеим сферам. Докажите, что в пространстве существует точка B, обладающая следующим свойством: если через точки A и B провести произвольную окружность, то точки ее повторного пересечения с данными сферами будут равноудалены от B.

24. (*11-й класс*) Пусть h — наименьшая высота тетраэдра, d — наименьшее расстояние между его противоположными ребрами. При каких t возможно неравенство $d > th$?

Шеф-редактор С. Островский
Главный редактор Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель
ООО
«Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя:
ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (499)249 3138
Отдел рекламы: (499)249 9870
Редакция газеты «Математика»:
тел.: (499)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА **Тел.: (499) 249-47-58** **E-mail: podpiska@1september.ru**