День учителя математики на Марафоне

Учителя математики – одни из самых целеустремленных педагогов. Возможно, этому способствует простота и логическая ясность предмета. Они всегда четко знают – в какую аудиторию идти и что именно спросить у лектора.

В ЭТОМ ВЫПУСКЕ

ВНИМАНИЕ, АНОНС!

Читайте в № 13 и № 14 газеты «Математика»

Тема № 13: Проектная деятельность

Метод проектов не является новшеством для нашей школы: он использовался еще в 1920–1930-е годы. Сегодня проекты понимаются несколько иначе, чем прежде, подтверждением чего служат разработки педагогов, помещенные в этом номере.

Тема № 14: Технологии в обучении математике

Что такое педагогическая технология? Какие бывают технологии? Какую выбрать технологию?

А также:

Победители и призеры XXXIV Всероссийской олимпиады школьников по математике

#24

Электронный информационный спутник газеты «Математика»

Программа для школ (классов) с углубленным изучением математики

(Извлечение, 8-9 классы)

Пояснительная записка

Основная задача обучения математике в школе заключается в обеспечении прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Наряду с решением основной задачи углубленное изучение математики предусматривает формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие их математических способностей, ориентацию на профессии, существенным образом связанные с математикой, подготовку к обучению в вузе.

В углубленном изучении математики выделяются *два этапа* (8–9-й и 10–11-й классы), отвечающие возрастным возможностям и потребностям школьников и соответственно различающиеся по целям.

Учащийся может начать углубленно заниматься математикой как с 8-го, так и с 10-го класса.

Первый этап углубленного изучения математики является в значительной мере ориентационным. На этом этапе ученику надо помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им, с тем чтобы по окончании 9-го класса он смог сделать сознательный выбор, в пользу дальнейшего углубленного либо обычного изучения математики. Интерес и склонность учащегося к математике должны всемерно подкрепляться и развиваться. В случае же потери интереса, изменения его в другом направлении ученику должна быть обеспечена возможность перейти от углубленного изучения к обычному.

Углубленное изучение математики на втором этапе предполагает наличие у учащихся более или менее устойчивого интереса к математике и намерение выбирать по окончании школы связанную с ней профессию. Обучение на этом должно обеспечить подготовку к поступлению в вуз и продолжению образования, а также к профессиональной деятельности, требующей достаточно высокой математической культуры.

Программа включает *два раздела*: «Требования к математической подготовке учащихся», «Содержание обучения».

Раздел «Требования к математической подготовке учащихся» задает примерный объем знаний, умений и навыков, которым должны овладеть школьники.

В этот объем, безусловно, входят те знания, умения и навыки, обязательное приобретение которых всеми учащимися предусмотрено требованиями программы общеобразовательной школы, однако предполагается иное, более высокое качество их сформированности.

Учащиеся должны приобрести умения решать задачи более высокой по сравнению с обязательным уровнем сложности:

— точно и грамотно формулировать изученные теоретические положения и излагать собственные рассуждения при решении задач и доказательстве теорем;

— правильно пользоваться математической терминологией и символикой;

— применять рациональные приемы вычислений и тождественных преобразований;

— использовать наиболее употребительные эвристические приемы и т.д.

Следует иметь в виду, что требования к знаниям и умениям учащихся при углубленном изучении математики ни в коем случае не должны быть завышенными. Чрезмерность требований порождает перегрузку, что ведет, особенно на первом этапе, к угасанию интереса к математике. Поэтому требования к результатам углубленного изучения математики на первом этапе не намного превышают требования общеобразовательной программы. Требования на втором этапе в соответствии с его целями согласуются со средним уровнем требований, предъявляемых вузами к математической подготовке абитуриентов. Заметим, что минимальный обязательный уровень подготовки, достижение которого учащимися является необходимым и достаточным условием выставления ему положительной оценки, при углубленном и обычном изучении математики один и тот же. Однако тем учащимся классов с углубленным изучением математики, успехи которых в течение длительного времени не поднимаются выше минимального обязательного уровня, следует рекомендовать перейти в обычный класс.

Раздел «*Содержание обучения*» включает полностью содержание курса 8–9-х классов общеобразовательной школы и ряд дополнительных вопросов, непосредственно примыкающих к этому курсу и углубляющих его по основным идейным линиям.

Включение дополнительных вопросов преследует две взаимосвязанные идеи. С одной стороны, это создание в совокупности с основными разделами курса базы для удовлетворения интересов и развития способностей учащихся, имеющих склонность к математике, с другой — восполнение содержательных пробелов основного курса, придающее содержанию углубленного изучения необходимую целостность.

Программа предусматривает возможность изучения содержания курса с различной степенью полноты. Дополнительные вопросы и темы, отмеченные квадратными скобками, при желании можно не изучать, что позволяет учителю, включая или исключая все или некоторые из этих вопросов, варьировать объем изученного материала и, соответственно, степень углубления и расширения курса в зависимости от конкретных условий.

Отдельные вопросы, отмеченные в программе звездочками, представляет материал повышенной трудности – эти вопросы можно изучать в ознакомительном порядке.

В связи с предоставленным учащимся правом начать углубленное изучение математики как с 8-го, так и с 10-го класса и необходимостью в любом случае обеспечить им возможность изучения полного, целостного курса, содержание обучения на первом и втором этапах имеет ряд пересечений. Соответствующий материал на втором этапе рассматривается с учащимися, приступившими к углубленному изучению с 8-го класса, в повторительном или обзорном порядке.

Учителю предоставляется право самостоятельного построения курса. При этом он может выбрать учебники из числа действующих в массовой школе, пробных и специально предназначенных для углубленного изучения математики.

Тематическое планирование учитель разрабатывает применительно к выбранному учебнику, учитывая подготовленность класса, интересы учащихся и исходя из учебного плана для школ и классов с углубленным изучением математики, согласно которому в 8–9-х классах изучаются два предмета — алгебра (5 ч в неделю, всего 170 ч в каждом классе) и геометрия (3 ч в неделю, всего 102 ч в каждом классе); в 10–11-х классах изучаются предметы алгебра и математический анализ (5–6 ч в неделю в 10-м классе, всего 187 ч, и 5 ч в неделю в 11-м классе, всего 170 ч) и геометрия (3 ч в неделю, всего 102 ч в каждом классе). При этом он может варьировать число часов, отводимых на ту или иную тему, переставлять темы, включать в них некоторые дополнительные теоретические вопросы или ограничиться программой массовой школы, полное прохождение которой в любом случае является обязательным.

Успешность решения задач углубленного изучения математики во многом зависит от организации учебного процесса. Учителю предоставляется возможность свободного выбора методических путей и организационных форм обучения, проявления творческой инициативы. Однако при этом следует иметь в виду ряд общих положений, изложенных ниже.

Учебно-воспитательный процесс должен строиться с учетом возрастных возможностей и потребностей учащихся.

Основной причиной отсева школьников из классов с углубленным изучением математики (особенно на первом этапе) является перегрузка, поэтому не следует стремиться к чрезмерному насыщению программы дополнительными вопросами.

Углубленное изучение математики предполагает прежде всего наполнение курса разнообразными, интересными и сложными задачами, овладение основным программным материалом на более высоком уровне. Для поддержания и развития интереса к предмету следует включать в процесс обучения занимательные задачи, сведения из истории математики.

На втором этапе возрастает роль теоретических знаний, становятся весьма значимыми такие их качества, как системность и обобщенность. Значительное место на этом этапе должно быть уделено решению задач, отвечающих требованиям к поступающим в вузы, где математика является профилирующим предметом.

В связи с тем, что в классы с углубленным изучением приходят школьники с разным уровнем подготовки, в процесс обучения на каждом этапе должны быть включены повторение и систематизация опорных знаний.

Учебный процесс должен быть ориентирован на усвоение учащимися, прежде всего, основного материала; при проведении текущего или итогового контроля знаний качество усвоения этого материала проверяется в обязательном порядке. Итоговому контролю не подлежит материал, отмеченный квадратными скобками или звездочкой.

Значительное место в учебном процессе должно быть отведено самостоятельной математической деятельности учащихся — решению задач, проработке теоретического материала, подготовке докладов, рефератов и т.д.

Очень важно организовать дифференцированный подход к учащимся, позволяющий избежать перегрузки и способствующий реализации возможностей каждого из них.

Требования к математической подготовке учащихся

Алгебра

В результате изучения курса алгебры учащиеся должны:

• бегло и уверенно выполнять арифметические действия над числами (в том числе над приближенными значениями), находить с помощью калькулятора или таблиц приближенные значения квадратных корней и тригонометрических функций, производить прикидку и оценку результатов вычислений;

• свободно владеть техникой тождественных преобразований; целых и дробных рациональных выражений; выражений, содержащих корни и степени с дробными показателями, тригонометрических выражений; составлять выражения и формулы, выражать из формулы одну переменную через другие;

• находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком;

• проводить исследование функций, указанных в программе видов, элементарными средствами;

• строить и читать графики функций, указанных в программе видов, овладеть основными приемами преобразования графиков и применять их при построении графиков;

• овладеть понятием последовательности и способами задания последовательностей, понятиями арифметической и геометрической прогрессии и их свойствами;

• усвоить основные приемы решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств указанных в программе видов; решать уравнения с параметрами, сводящиеся к линейным или квадратным;

• уметь решать текстовые задачи методом уравнений;

• доказывать теоремы, изученные в курсе, давать обоснования при решении задач, опираясь на теоретические сведения курса;

• овладеть основными алгебраическими приемами и методами и применять их при решении задач.

Геометрия

В результате изучения курса геометрии учащиеся должны:

• доказывать изученные в курсе теоремы;

• проводить полные обоснования при решении задача, используя для этого изученные теоретические сведения;

• освоить определенный набор приемов решения геометрических задач и уметь применять их в задачах на вычисление, доказательство, построение;

• овладеть общими методами геометрии (преобразований, векторным, координатным) и применять их при решении геометрических задач;

• свободно оперировать аппаратом алгебры и тригонометрии при решении тригонометрических задач.

Содержание обучения

Множества и элементы комбинаторики

Множество. Элемент множества. Пустое множество. Пересечение и объединение множеств. Подмножество. Конечные и бесконечные множества. Число элементов объединения и пересечения двух конечных множеств. Взаимно однозначное соответствие между множествами. [Понятие о мощности множества. Принцип Дирихле.

Комбинированный принцип умножения. Число элементов прямого произведения двух множеств. Число подмножеств конечного множества. Число k-элементных подмножеств конечного множества из n элементов (число сочетаний). Число перестановок. Понятие вероятности события. Подсчет вероятностей простейших событий.]

Числа и вычисления

Натуральные числа. Делимость натуральных чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 11. Простые и составные числа. [Основная теорема арифметики. Бесконечность множества простых чисел. Взаимно простые числа.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Нахождение наибольшего общего делителя. Алгоритм Евклида. Линейное представление наибольшего общего делителя. Критерий взаимной простоты двух чисел.]

Свойства множества натуральных чисел. Условие разрешимости $a + x = b$ в множестве натуральных чисел и операция вычитания.

Целые числа. Деление с остатком. Свойства множества целых чисел. Условие разрешимости уравнений вида $ax = b$ в множестве целых чисел и операция деления.

Рациональные числа. Свойства множества рациональных чисел. Выполнимость арифметических операций в множестве рациональных чисел и свойства этих операций. Числовые неравенства и их свойства.

Задача измерения величин. Единица измерения. Измерение отрезков: единичный отрезок, процесс измерения.

[Общая мера двух отрезков. Соизмеримость и несоизмеримость отрезков. Связь между соизмеримостью отрезков и отношением их длин. Алгоритм Евклида для определения соизмеримости отрезков. Несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной.]

Бесконечная десятичная дробь как результат измерения отрезка. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Взаимно однозначное соответствие между множеством точек координатной прямой и множеством действительных чисел.

Периодические десятичные дроби. Представление рационального числа в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Примеры бесконечных непериодических десятичных дробей. Иррациональные числа.

Свойства множества действительных чисел. Решение уравнения $x^2 = 2$ в множестве рациональных и в множестве действительных чисел.

Квадратный корень. Условие существования квадратного корня и число квадратных корней из действительного числа. Арифметический квадратный корень.

Иррациональность числа $\sqrt{2}$. Корень n-й степени. Степень с дробным показателем.

Измерение углов. Радиан. Радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла (в градусах и радианах).

Выражения и их преобразования

Сложение, вычитание и умножение многочленов. Формулы сокращенного умножения: куб двучлена и квадрат алгебраической суммы нескольких слагаемых.

Разложение многочлена на множители способом группировки. Формулы разложения на множители разности и суммы кубов, разности $x^n - y^n$ и суммы $x^{2^{k+1}} + y^{2^{k+1}}$.

Многочлены с одной переменной. Квадратный трехчлен. Выделение полного квадрата. Разложение квадратного трехчлена на множители. [Деление многочленов с остатком. Делимость многочленов. Теорема Безу и ее следствие о делимости многочлена на линейный двучлен.]

Рациональные выражения. Основное свойство дроби. Сокращение дробей. Приведение дробей к общему знаменателю. Сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень дробей. Тождественные преобразования рациональных выражений.

Степень с целым показателем и ее свойства. Стандартный вид числа.

Свойства арифметических корней n-й степени. Свойства степеней с рациональными показателями. Преобразование выражений с радикалами и степенями с дробными показателями.

Тригонометрические тождества: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Формулы приведения. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. Синус, косинус и тангенс двойного угла. Формулы половинного угла. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. [Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.]

Функция

Числовые функции. Способы задания функции. Область определения и область значений функции.

Графики функции. Преобразования графиков функций: параллельный перенос, растяжение и сжатие вдоль осей координат, симметрия относительно осей координат и относительно прямой $y = x$.

Свойства функции: четность и нечетность, возрастание и убывание, нули функции и промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значения функции. Отражение свойств функции на графике. Элементарное исследование функции.

Функция как соответствие между множествами.

Элементарные функции: линейная, прямая и обратная пропорциональности, квадратичная, степенная с натуральным показателем, модуль, квадратный корень, кубический корень, корень n-й степени. Их свойства и графики.

[Построение графиков кусочно-заданных функций. Построение графиков функций, связанных с модулем. Примеры построения графиков рациональных функций.]

Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$.

Числовые последовательности. Способы задания числовых последовательностей. Формула n-го члена. Рекуррентная формула. Числа Фибоначчи.

Возрастающие и убывающие (монотонные) последовательности. [Метод математической индукции.] Арифметическая и геометрическая прогрессии, формулы n-го члена и суммы первых n членов прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. [Понятие о пределе последовательности.]

Уравнения

Уравнение. Корень уравнения. Равносильность уравнений. Уравнение-следствие. Исключение «посторонних» корней.

Линейное уравнение с одним неизвестным. Линейное уравнение с параметром. Квадратное уравнение: формула корней, зависимость числа корней от дискриминанта, формулы Виета, составление уравнений с заданными корнями. Уравнения, сводимые к квадратным. Биквадратные уравнения.

Корень многочлена. Нахождение целых и дробных корней многочлена с целыми коэффициентами. Число корней многочлена. Решение рациональных уравнений. [Решение рациональных уравнений с параметром.] Примеры решения иррациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Решение линейного уравнения в целых числах.

Система уравнений. Решение систем уравнений. Равносильность. Уравнение-следствие. Приемы решения систем: подстановка, алгебраическое сложение. [Решение систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными методом Гаусса.]

График уравнения с двумя переменными. Уравнение окружности. Получение приближенного корня способом графического решения систем уравнений.

Решение текстовых задач с помощью уравнений и систем.

Неравенство с переменными. Числовые промежутки. Решение линейных неравенств с одной переменной и их систем. Геометрическая интерпретация линейных неравенств с двумя переменными и их систем. Квадратные неравенства. Рациональные неравенства. Метод интервалов. Доказательство неравенств.

Основные понятия планиметрии

Неопределяемые понятия и аксиомы. Доказательства. Теоремы. Непротиворечивость системы аксиом.

[Исторические этапы развития геометрии: «Начала» Евклида, попытки доказательства пятого постулата, создание геометрии Лобачевского.]

[Понятие о длине кривой.] Площадь фигуры и ее свойства. Равновеликость и равносоставленность фигур.

Треугольники

Замечательные точки треугольника. Теорема Пифагора. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла. Теорема синусов. Теорема косинусов. Решение треугольников. Площадь треугольника. Формула Герона.

Многоугольники

Понятие о многоугольнике. Площадь многоугольника.

Параллелограмм и его свойства. Признаки параллелограмма. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция и ее свойства. Правильные многоугольники.

Площади прямоугольника, параллелограмма, трапеции, правильного многоугольника.

Окружность и круг

Длина окружности. Длина дуги окружности, площади круга и его частей.

Величина центрального угла. Величина вписанного угла. Величина угла между хордой и касательной. Величина угла с вершиной внутри и вне круга.

Окружности, вписанные в треугольники и описанные вокруг треугольника.

Вписанные и описанные четырехугольники.

Методы геометрии

*Движения плоскости. *Симметрия относительно точки и прямой. Центрально-симметричные фигуры и фигуры, симметричные относительно оси. Поворот. Параллельный перенос. [*Бордюры и орнаменты. *Равенство фигур и его свойства.]

Применение движений к решению задач.

Преобразование подобия. Гомотетия и ее свойства. Подобие и его свойства. Отношение площадей подобных фигур. Признаки подобия треугольников.

Применение подобия к решению задач.

Прямоугольная система координат на плоскости. Формула расстояния между точками. Деление отрезка в данном отношении. Координаты середины отрезка. Уравнения прямой и окружности. [Задание фигур уравнениями и неравенствами.]

*Эллипс, гипербола, парабола и их уравнения. *Применение координат к решению задач.

Векторы. Длина и направление вектора. Угол между векторами. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Координаты вектора, суммы векторов, произведения числа и вектора. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов.

Применение векторов к решению задач. Основные задачи на построение. Решение задач на построение с помощью циркуля и линейки. Применение алгебры и тригонометрии к решению планиметрических задач.

Т. КОЛЕСНИКОВА,
Москва

Задания повышенной трудности в экзамене по алгебре в новой форме

С 2003 года во многих регионах страны сначала в режиме эксперимента, а затем и в более широких масштабах итоговая аттестация по алгебре в 9-м классе проходит по новой форме. Экзаменационные работы, которые используются при проведении этой аттестации, обладают большими дифференцирующими возможностями. В значительной степени это осуществляется за счет второй части экзаменационной работы, направленной на проверку повышенных уровней подготовки учащихся. Основное ее назначение — дифференцировать хорошо успевающих школьников, учащихся классов с углубленным изучением математики, а также тех, кто интересуется математикой, занимается дополнительно в кружках, по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников основной школы, в частности, составляющих потенциал профильных классов математической направленности.

Вторая часть экзаменационной работы содержит 5 заданий разного уровня сложности из различных разделов курса:

1. Выражения и их преобразования.
2. Уравнения и системы уравнений.
3. Неравенства.
4. Функции.
5. Координаты и графики.
6. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
7. Текстовые задачи.

Все задания базируются на содержании «Обязательного минимума содержания основного общего образования» и не содержат материала, специфичного для программы углубленного изучения математики.

Задания во второй части работы расположены по нарастанию сложности — от относительно простых до достаточно сложных, предполагающих свободное владение материалом и высокий уровень математического развития. Соответственно различается и их вклад в общий балл (рейтинг) учащегося, выставляемый ему за выполнение работы: 2 балла, 4 балла и 6 баллов. Все эти задания требуют развернутого ответа (с записью решения).

Рассмотрим некоторые принципы отбора и особенности задач повышенного уровня. При этом в основном будем останавливаться на содержании наиболее сложных задач — двух последних заданий («на 6 баллов»), которые в определенной степени являются новыми для экзаменационной работы и рассчитаны на наиболее подготовленных учащихся. Именно эти задачи формируют высокий рейтинг ученика при успешном их выполнении (учащийся может набрать до 30 баллов).

Рассмотрим примеры таких заданий по каждому из семи блоков содержания.

Выражения и их преобразования

Учащимся знаком способ решения уравнений путем замены переменной. *Введение новой переменной* помогает упростить выкладки, увидеть необходимые формулы и т.д.

Задача 1. Представьте выражение в виде произведения двух многочленов:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-15.$$

Перемножим попарно крайние и средние множители. Получим

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)-15$$

и введем новую переменную $t = x^2 + 3x$. Тогда

$$t(t+2)-15 = t^2+2t-15 = (t-3)(t+5).$$

Искомое разложение имеет вид

$$(x^2+3x-3)(x^2+3x+5).$$

Задача 2. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1-a\sqrt{a}}{a(1-\sqrt{a})}+1$$

при $a = 0{,}4$.

Замена $b=\sqrt{a}$ позволяет «разглядеть» в числителе разность кубов и, следовательно, сократить дробь.

Еще одна идея задач этого блока — *нахождение наибольшего (наименьшего) значения выражения*. Для решения этих задач ученик может воспользоваться методом выделения полного квадрата или известными свойствами квадратичной функции.

Задача 3. Чему равно наибольшее значение произведения ab, если $1 \le a \le 3$, $b = 5 - a$?

Представив ab в виде квадратичной функции $f(a) = a(5 - a)$, найдем ее наибольшее значение. Нередко ученик рассуждает ошибочно и получает ответ 12, не учитывая, что числа a и b не могут одновременно достигать своих наибольших значений: $a = 3$, $b = 4$.

Во многих заданиях повышенной сложности отражена идея *преобразования иррационального числа* из одной формы записи в другую.

Задача 4. Между какими соседними целыми числами заключено значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}?$$

Для того чтобы преобразовать такое выражение, надо применить прием избавления от иррациональности в знаменателе дроби. Получим:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\ldots+\frac{\sqrt{21}-\sqrt{19}}{21-19}=\frac{\sqrt{21}-1}{2}.$$

Уравнения и системы уравнений

Здесь мы рассмотрим задачи, решаемые с использованием следующих приемов:

— разложение на множители и применение формул сокращенного умножения;

— введение новой переменной;

— использование теоремы Виета (угадывание корней, определение знаков корней и т.д.);

— рассмотрение графиков и применение свойств функций.

Задача 5. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2 - 2ax + (a + 1)(a - 1) = 0$$

принадлежат промежутку $[-5; 5]$?

Ученик может найти дискриминант этого уравнения и вычислить корни по формуле. Однако корни уравнения можно просто угадать. Действительно, $x_1 = a - 1$ и $x_2 = a + 1$, поскольку их произведение равно свободному члену, а сумма — коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком. Условие принадлежности корней промежутку $[-5; 5]$ равносильно системе

$$\begin{cases} -5 \le a+1 \le 5, \\ -5 \le a-1 \le 5. \end{cases}$$

В то же время, если ученик заметил, что $x_1 < x_2$, то он может составить более простую систему неравенств

$$\begin{cases} a+1 \le 5, \\ a-1 \ge -5. \end{cases}$$

Задача 6. Докажите, что уравнение

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 4x + 5) = 1$$

не имеет корней.

В данной задаче используется факт существования наименьшего значения, равного 1, у каждой из двух квадратных функций в скобках, но оно достигается в разных точках.

Приведем примеры нестандартных систем уравнений, включенных в данный блок.

Во-первых, это системы, в которых число неизвестных превышает число уравнений. Решая подобную систему, ученик должен понимать, что для нахождения значений неизвестных, конечно, недостаточно данных. Однако в таких задачах это и не требуется. Следует обратить внимание на формулировку вопроса. Приведем следующий пример.

Задача 7. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{z}{4}+\dfrac{y}{12}=1, \\[2mm] \dfrac{y}{5}+\dfrac{x}{10}+\dfrac{z}{3}=1. \end{cases}$$

Найдите сумму $x + y + z$.

Во-вторых, это системы с буквенными коэффициентами.

Задача 8. При каких значениях p система

$$\begin{cases} y = p - x, \\ 4y = x^2 \end{cases}$$

не имеет решений?

Задача сводится к исследованию квадратного уравнения $4(p - x) = x^2$, полученного из данной системы методом подстановки. Требуется найти значения p, при которых данное квадратное уравнение не имеет корней, то есть его дискриминант отрицателен.

Неравенства

Здесь рассмотрим несколько заданий такого содержания:

— неравенства, решаемые при помощи замены переменной;

— задания на сравнение иррациональных чисел;

— неравенства и их системы с буквенными коэффициентами.

Задача 9. Найдите целые значения x, при которых выражение

$$\sqrt{\left(12-x\sqrt{3}\right)\left(x\sqrt{2}-10\right)}$$

имеет смысл.

Чтобы указать промежуток, которому принадлежат значения x, при которых выражение имеет смысл, необходимо провести сравнение иррациональных чисел $\frac{12}{\sqrt{3}}$ и $\frac{10}{\sqrt{2}}$. Далее определить, между какими соседними целыми числами заключено каждое из них.

Задача 10. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x+2\sqrt{2}>\sqrt{5}, \\ x+3<\sqrt{6}. \end{cases}$$

Здесь ученик сталкивается с проблемой сравнения иррациональных чисел $\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}-3$. Дополнительная сложность такого сравнения заключается в том, что эти числа отрицательны.

Задача 11. При каких значениях a неравенство

$$x^2+(2a+4)x+8a+1>0$$

выполнятся при всех значениях x?

Для решения задачи удобно воспользоваться графическими соображениями. Парабола

$$y=x^2+(2a+4)x+8a+1$$

должна целиком располагаться выше оси абсцисс. Значит, необходимо найти значения a, при которых дискриминант отрицателен.

Функции

Для успешного выполнения наиболее трудных заданий этого раздела ученик должен уметь:

— строить графики кусочно-заданных функций, а также функций с модулем вида $y=|f(x)|$ или $y=f(|x|)$;

— задавать аналитически кусочно-линейную функцию по готовому графику;

— строить нестандартные графики (например, графики с выколотыми точками, графики функций со сложной областью определения и т.д.);

— проводить некоторое исследование заданной функции.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Задача 12. Постройте график функции $y=x^2-4|x|$. Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая $y=m$? Для каждого случая укажите соответствующие значения m.

Для построения данного графика ученик может либо раскрыть модуль и задать функцию кусочно (при $x\ge 0$ и при $x<0$), либо воспользоваться симметрией графика относительно оси ординат.

Задача 13. Найдите наибольшее значение функции $y=-x+4\sqrt{x}+1$. При каком значении аргумента оно достигается?

При помощи замены $t=\sqrt{x}$ задача сводится к нахождению наибольшего значения квадратичной функции $y=-t^2+4t+1$ при $t\ge 0$.

В заключение приведем следующий пример.

Задача 14. Постройте график функции

$$y=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x-1}.$$

Преобразование данного буквенного выражения содержит два важных момента — расширение ОДЗ при возведении в квадрат корня и при последующем сокращении полученной дроби. Область допустимых значений является решением системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-1\ge 0, \\ x-1\ne 0. \end{cases}$$

Координаты и графики

Большинство задач этого блока — задачи на исследование взаимного расположения графика линейной функции и какой-либо кривой (параболы, гиперболы или окружности). При этом некоторые задачи усложнены тем, что одно из заданных уравнений имеет буквенные коэффициенты. Примером может служить следующая задача.

Задача 15. При каких положительных значениях k парабола $y=x^2+x-1$ и прямая $y=kx-2$ не пересекаются?

В большинстве случаев решение таких задач сводится к составлению и исследованию квадратного уравнения с параметром. Так, в данной задаче уравнение имеет вид

$$x^2+x-1=kx-2, \text{ или } x^2+(1-k)x+1=0.$$

Графики не пересекаются, если квадратное уравнение не имеет корней, то есть дискриминант меньше нуля.

Данный блок включает в себя также группу задач на построение различных множеств на координатной плоскости.

Задача 16. Постройте график уравнения

$$\frac{xy-1}{y-x}=0.$$

Ответом служит гипербола $xy=1$, у которой выколоты две точки, удовлетворяющие условию $y=x$.

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Многие задачи этого блока предусматривают использование формулы суммы арифметической прогрессии:

— задачи на вычисление значений числовых выражений;

— уравнения;

— задания на суммирование натуральных чисел.

Задача 17. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

В заданиях такого типа важно увидеть нужную прогрессию, уметь определить количество ее членов и т.д.

Особые трудности у учеников вызывают задачи, в которых речь идет сразу о двух прогрессиях — арифметической и геометрической.

Текстовые задачи

Большинство задач решается, как обычно путем составления уравнения или системы уравнений. Однако есть такие задачи, в которых число уравнений оказывается меньше числа неизвестных. В этом случае следует внимательно прочитать вопрос. Примером может служить следующая задача.

Задача 18. Четыре бригады должны разгрузить вагон с продуктами. Вторая, третья и четвертая бригады вместе могут выполнить эту работу за 4 ч; первая, третья и четвертая — за 3 ч. Если же будут работать только первая и вторая бригады, то вагон будет разгружен за 6 ч. За какое время могут разгрузить вагон все четыре бригады, работая вместе?

Обозначив за x, y, z, t производительность каждой из бригад, составим систему уравнений

$$\begin{cases} y+z+t=\dfrac{1}{4}, \\ x+z+t=\dfrac{1}{3}, \\ x+y=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Сложим все уравнения системы. Получим

$$2(x+y+z+t)=\frac{3}{4}.$$

Отсюда общая производительность всех четырех бригад равна $\frac{3}{8}$. Следовательно, им понадобится $\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ ч на всю работу.

Хочу отметить, что помимо алгебраического нужно поощрять и арифметические способы решения текстовых задач, особенно в тех случаях, где это рационально.

При подготовке к экзамену также необходимо уделить внимание задачам на проценты. Традиционно такие задачи вызывают массу проблем у учеников. Стандартный подход составления пропорции часто не работает в заданиях повышенной сложности, поэтому на уроках следует разбирать разные способы решения задач на проценты.

Задача 19. Закупив чайные кружки на складе, магазин стал продавать их по цене, приносящей доход 50%. Перед Новым годом цена была снижена на 40%. Какая цена меньше: та, по которой магазин закупил кружки, или предновогодняя, и на сколько процентов?

Примем за x руб. цену, по которой магазин закупил кружки на складе, тогда они продавались за $1{,}5x$ руб. Перед Новым годом цена стала $0{,}6 \cdot 1{,}5x = 0{,}9x$ руб. Следовательно, предновогодняя цена меньше на 10%.

Основная проблема здесь состоит в том, что ученик часто не понимает, что взять за 100% в каждом конкретном случае. Следовательно, учитель должен обратить на это особое внимание.

Более подробно с задачами, которые предлагаются во второй части экзаменационной работы по алгебре в новой форме, можно познакомиться по изданию, подготовленному авторами экзаменационных материалов и вышедшему в издательстве «Просвещение» в 2006 году: Кузнецова Л.В. и др. «Алгебра. Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе». В 2008 году выходит в свет новое издание этого сборника, переработанное и дополненное заданиями по вероятностно-статистическому разделу содержания и методическими рекомендациями по выполнению отдельных заданий и работы в целом.

Экзаменационные билеты по геометрии для классов с углубленным изучением математики

Экзаменационные билеты составлены на основе программы по геометрии для школ (классов) с углубленным изучением предмета и не «привязаны» ни к какому конкретному учебнику. Билеты рассчитаны на учащихся, имеющих не менее трех часов в неделю по геометрии в течение 8-го и 9-го классов.

Билет включает в себя три вопроса, относящихся к разным темам курса; *первый* и *второй* вопросы носят теоретический характер, а в *третьем* экзаменующемуся предлагаются две задачи.

При составлении билетов учитель может также воспользоваться своими задачами или задачами из «Сборника задач по геометрии для проведения устного экзамена в 9 и 11 классах» (авт. Д.И. Аверьянов, Б.П. Пигарев, А.Р. Рязановский. — М., Просвещение, 1996).

Для получения высшей оценки необходимо доказать не менее двух теорем и решить одну задачу.

Билет № 1

1. Свойства равнобедренного треугольника, теорема о свойстве медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.

2. Зависимость между стороной правильного многоугольника и радиусом описанной и вписанной окружности. (Вывод формулы.) Установление этой зависимости для квадрата, правильного треугольника, шестиугольника.

3. Задача по теме «Подобие треугольников».

а) Одна из сторон треугольника равна 8, а два из его углов равны соответственно 30° и 45°. Найдите все возможные значения периметра треугольника.

б) Один из углов треугольника равен 150°, а две из его сторон равны 2 и 7. Найдите все возможные значения площади треугольника.

Билет № 2

1. Признаки равенства треугольника. (Доказательство всех признаков.)

2. Деление отрезка на n равных частей (с обоснованием).

3. Задача по теме «Вписанная окружность».

а) В треугольнике ABC углы A и B равны 38° и 86° соответственно. Найдите углы треугольника, вершинами которого являются точки касания сторон с вписанной в ABC окружностью.

б) В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Найдите длины каждого из шести отрезков, на которые разбивают стороны треугольника точки касания вневписанных окружностей.

Билет № 3

1. Пропорциональные отрезки в круге.

2. Вывод формулы для вычисления суммы углов выпуклого многоугольника.

3. Задача по теме «Метод координат».

а) Напишите уравнение всех прямых, отсекающих от окружности $x^2 + y^2 = 25$ хорду длины 6.

б) Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до вершин равностороннего треугольника равна квадрату периметра этого треугольника.

Билет № 4

1. Параллельные прямые (определение). Признаки параллельности двух прямых и их доказательство.

2. Нахождение гипотенузы, катета и острого угла прямоугольного треугольника по данным его второго катета и острому углу.

3. Задача по теме «Углы в окружности».

а) В окружность вписан одиннадцатиугольник, одна из сторон которого равна радиусу окружности, а остальные десять сторон равны между собой. Найдите углы одиннадцатиугольника.

б) На окружности с центром в точке O выбраны точки M и N. Вторая окружность вдвое меньшего радиуса касается первой в точке M и делит пополам отрезок ON. Найдите угол ONM.

Билет № 5

1. Теорема об углах, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей.

2. Вывод формулы площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C.$$

3. Задача по теме «Правильные многоугольники».

а) Точка F лежит на стороне AB правильного восьмиугольника $ABCDMNPQ$ так, что $AF=3\sqrt{2}$, $FB=\sqrt{2}$. Найдите расстояние от точки F до прямых, содержащих стороны восьмиугольника.

б) $ABCDEF$ — правильный шестиугольник площади S. Какая фигура образуется в пересечении треугольников ACE и BDF? Найдите ее площадь.

Билет № 6

1. Внешний угол треугольника (определение). Теорема о внешнем угле треугольника. Сумма внешних углов n-угольника.

2. Нахождение значений синуса, косинуса и тангенса угла в 45°.

3. Задача по теме «Описанная окружность».

а) В треугольнике ABC $AB=2$, $BC=3$ и угол BAC в 3 раза больше угла BCA. Найдите радиус описанной окружности.

б) В треугольнике ABC $\angle A=45°$, $AB=7$, $AC=4\sqrt{2}$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ACA_1 и BAA_1, где AA_1 — высота треугольника ABC.

Билет № 7

1. Геометрическое место точек. Теорема о геометрическом месте точек, равноудаленных от двух данных точек, в геометрической и аналитической формах.

2. Круг (определение). Формула для вычисления площади круга (без вывода). Вывод формулы площади кругового сектора.

3. Задача по теме «Трапеция».

а) Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции (их длины a и b) и делящего трапецию на две равновеликие части.

б) Найдите площадь трапеции с боковыми сторонами 13 и 20 и основаниями 6 и 27.

Билет № 8

1. Треугольник (определение). Теорема о сумме углов треугольника, прямая Эйлера (без доказательства).

2. Выражение расстояния между двумя точками через координаты этих точек (рассмотреть все случаи).

3. Задача по теме «Комбинации окружностей».

а) В круговой сектор с углом 60° помещен круг, касающийся дуги сектора и обоих радиусов. Найдите отношение площади сектора и площади круга.

б) Найдите площадь фигуры и длину границы фигуры, являющейся общей частью двух кругов радиуса R каждый, если расстояние между их центрами также равно R.

Билет № 9

1. Признаки равенства прямоугольных треугольников (доказательства всех признаков).

2. Окружность (определение). Формула для вычисления длины окружности (без вывода). Вывод формулы длины дуги окружности.

3. Задача по теме «Площади многоугольников».

а) В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 делят стороны BC, AC и AB соответственно в отношениях $BA_1 : A_1C = 3 : 7$, $AB_1 : B_1C = 1 : 3$, $AC_1 : B_1C = 1$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

б) В прямоугольнике $ABCD$ $AD : AB = 5 : 3$. На сторонах AB, BC, CB и DA выбраны точки E, F, M и P соответственно так, что $AP : PD = 2 : 3$, а $EFMP$ — ромб. Найдите отношение площадей прямоугольника и ромба.

Билет № 10

1. Признаки параллелограмма с доказательством.

2. Построение треугольника по трем сторонам.

3. Задача по теме «Окружность и многоугольник».

а) Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении 1 : 2, считая от вершины его острого угла. Какую часть ромба составляет площадь вписанного в него круга?

б) В равнобедренную трапецию с острым углом α вписана окружность. Какой процент площади трапеции занимает площадь четырехугольника с вершинами в точках касания?

Билет № 11

1. Параллелограмм (определение). Свойства параллелограмма с доказательством (не менее четырех свойств).

2. Построение биссектрисы угла. Свойства биссектрисы угла треугольника.

3. Задача по теме «Элементы треугольника».

а) Две медианы треугольника равны 3 и 4. В каких пределах может изменяться третья медиана? При каких ее значениях треугольник будет прямоугольным?

б) Две высоты треугольника равны 2 и 3. В каких пределах может изменяться третья высьта треугольника? При каких ее значениях треугольник будет прямоугольным?

Билет № 12

1. Прямоугольник (определение). Свойства прямоугольника (не менее двух). Признаки прямоугольника.

2. Нахождение катета и острых углов прямоугольного треугольника по заданным гипотенузе и другому катету.

3. Задача по теме «Пропорциональные отрезки в круге».

а) Найдите расстояние от центра окружности радиуса 9 см до точки пересечения двух взаимно перпендикулярных хорд длиной 16 см и 14 см соответственно.

б) Точка A лежит внутри круга с центром O и радиусом R так, что $OA = a$ ($a < R$). Докажите, что для любой хорды MN, проходящей через точку A, выполняется соотношение $MA \cdot AN = R^2 - a^2$.

Билет № 13

1. Ромб (определение). Свойства ромба. Признаки ромба.

2. Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.

3. Задача по теме «Биссектриса внутреннего угла треугольника».

а) Биссектриса треугольника делит одну из его сторон на отрезки длиной 3 см и 5 см. В каких пределах может изменяться периметр треугольника?

б) Гипотенуза прямоугольного треугольника делится на отрезки 5 см и 12 см точкой касания вписанной в треугольник окружности. На какие отрезки делит катет треугольника биссектриса его меньшего угла?

Билет № 14

1. Теорема Менелая (прямая и обратная). Доказать одну из них.

2. Вписанный четырехугольник.

3. Задача по теме «Задача на построение».

а) Постройте отрезок длины $\sqrt{a^2 - b^2 + ab}$, где $a > b$, если a и b — длины двух данных отрезков.

б) Постройте треугольник по трем точкам касания его сторон с вписанной в треугольник окружностью.

Билет № 15

1. Средняя линия треугольника и трапеции (определение). Теоремы о средней линии треугольника и трапеции.

2. Построение окружности, вписанной в треугольник и описанной около него.

3. Задача по теме «Дополнительные теоремы геометрии».

а) На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, причем отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что $\frac{OC}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$.

б) Точка A лежит на стороне BC треугольника ABC так, что $A_1B : A_1C = 1 : 3$. Вершина A — середина отрезка MC. В каком отношении (считая от B) прямая A_1M делит сторону AB?

Билет № 16

1. Признаки подобия треугольников (доказательства).

2. Построение касательной к окружности (два случая).

3. Задача по теме «Прямоугольник, квадрат».

а) $ABCD$ — квадрат со стороной a. Вершины C, A и B являются серединами отрезков BM, ND и DF соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника NFM.

б) Квадрат $ABCD$ со стороной 8 см повернули вокруг его центра O так, что точка K, лежащая на стороне AB, где $AK = 1$ см, перешла в точку на стороне BC. Найдите всевозможные расстояния между точкой D и ее образом D_1 при этом повороте.

Билет № 17

1. Вывод формулы площади треугольника $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$. Формула Герона (вывод).

2. Выражение координат середины отрезка через координаты его концов (рассмотреть все случаи).

3. Задача по теме «Векторы».

а) Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4$, $|2\vec{a} - 5\vec{b}| = 17$, $(3\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - 3\vec{b}) = 42$.

б) *Дано*: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{a}+\vec{b}| = 3$. Вычислите $|\vec{a}+2\vec{b}|$.

Билет № 18

1. Вывод формулы площади параллелограмма $S = a \cdot h_a$, $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\left(\widehat{d_1; d_2}\right)$.

2. Вывод формулы радиуса описанной и вписанной окружностей (для треугольника).

3. Задача по теме «Задачи на построение».

а) Постройте отрезок $\frac{a^2}{c}$, где a и c — длины данных отрезков.

б) По данным четырем отрезкам a, b, c и d постройте трапецию с основаниями a и b. При каком соотношении между длинами этих отрезков это возможно?

Билет № 19

1. Трапеция (определение). Вывод формулы площади трапеции. Теорема о четырех точках трапеции (доказательство).

2. Уравнение окружности (вывод). Взаимное расположение прямой и окружности в координатах.

3. Задача по теме «Решение треугольников».

а) Найдите острые углы треугольника ABC, если $\angle ABC = 90°$, $AC = 2\sqrt{3}$, $BK = 1$, где CK — высота треугольника.

б) В треугольник ABC вписана окружность. C_1, B_1 — точки ее касания со сторонами AB и AC соответственно; $AC_1 = 7$, $BC_1 = 6$, $B_1C = 8$. Найдите радиусы вписанной и описанной около треугольника ABC окружностей.

Билет № 20

1. Теорема Пифагора (прямая и обратная).

2. Правильный многоугольник (определение). Построение правильного четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника.

3. Задача по теме «Координаты на плоскости».

а) Найдите площадь треугольника с вершинами $A(1; 4)$, $B(-3; -1)$, $C(2; -2)$.

б) Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности, описанной около правильного треугольника, до трех его вершин постоянна и равна удвоенному квадрату стороны этого треугольника.

Билет № 21

1. Теорема синусов.

2. Построение прямой, параллельной данной.

3. Задача по теме «Подобие».

а) Найдите площадь квадрата, вписанного в ромб со стороной 6 см и углом 30° (сторона квадрата параллельна диагонали ромба).

б) Найдите длину отрезка, параллельного основаниям трапеции (их длины a и b) и делящего трапецию на два подобных четырехугольника.

Билет № 22

1. Теорема косинусов.

2. Деление отрезка пополам (два способа).

3. Задача по теме «Комбинации с окружностями».

а) Найдите площадь фигуры, ограниченной дугами трех попарно соединяющихся окружностей радиусов 1, 1 и $\sqrt{2}-1$.

б) Круги радиусов 1, 6 и 14 касаются друг друга. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник с вершинами в центрах данных кругов.

Билет № 23

1. Окружность Аполлония.

2. Вертикальные углы (определение). Свойство вертикальных углов. Смежные углы.

3. Задача по теме «Элементы треугольника».

а) Докажите, что биссектриса AA_1 треугольника ABC вычисляется по формуле

$$AA_1 = \frac{2 \cdot AB \cdot AC \cos\frac{A}{2}}{AB_1 + AC}.$$

б) Докажите, что медиана треугольника со сторонами a, b, c, проведенная к стороне a, вычисляется из соотношения

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 + a^2}{4}.$$

Билет № 24

1. Теорема Чевы (прямая и обратная). Доказать одну из них.

2. Описанный четырехугольник.

3. Задача по теме «Прямоугольный треугольник».

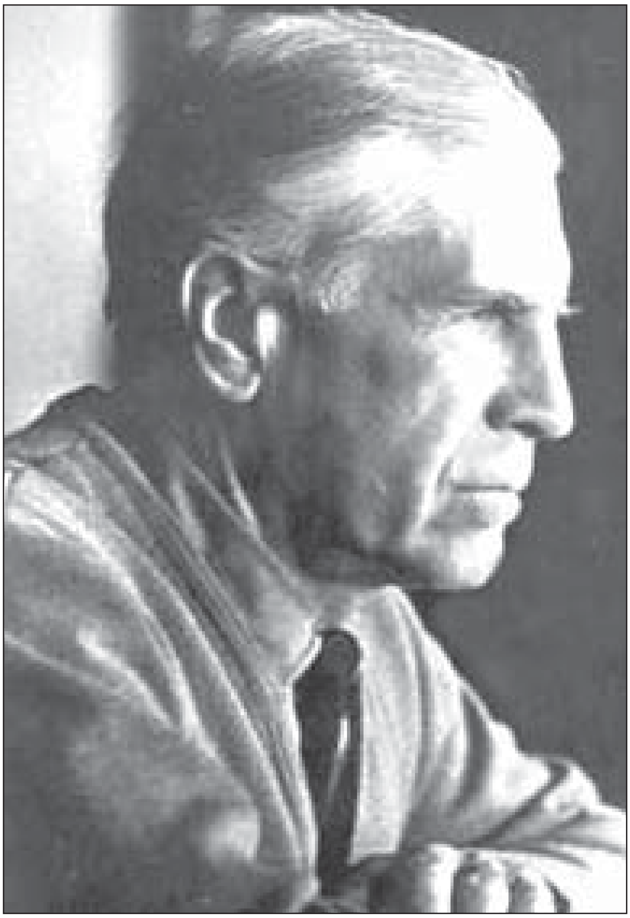
а) Окружность, касающаяся гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов, имеет радиус q. Найдите периметр треугольника.

б) В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 90°, CD — высота, а один из катетов вдвое больше другого. В треугольниках ACD и BCD проведены биссектрисы DK и DP соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $KP = 4$.

А. МИЩЕНКО,
Москва

Выдающийся математик современности

к 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина



Тридцать восемь лет назад, в сентябре 1970 г., во французском городе Ницца во Дворце спорта собралось более пяти тысяч математиков всего мира на Международный конгресс математиков. Шло обычное пленарное заседание. Но вот на трибуне появился очередной докладчик, и все участники встали и длительными аплодисментами приветствовали его, выражая свое восхищение ученым, который при жизни стал заслуженно признаваться классиком мировой науки. На трибуне стоял выдающийся советский математик Лев Семенович Понтрягин, известный всему научному миру как создатель целой математической области – математической теории оптимальных процессов, имеющей первостепенное значение в прикладной математике. Не будет преувеличением сказать, что не было другого ученого, который смог бы с такой глубиной и фундаментальностью справиться с этой важной и трудной математической задачей. В современной математике мы уже давно привыкли к тому, что крупные ученые, внесшие фундаментальный вклад в развитие науки, как правило, все же являлись специалистами в одной узкой области. Создать же лицо современной прикладной математики было под силу только такому ученому, у которого необычайно огромный диапазон интересов, широчайший математический кругозор. Таким ученым был Лев Семенович Понтрягин. **3 сентября 2008 г. ему исполнилось бы 100 лет.**

Математический гений Понтрягина оказывает влияние не только на многочисленные разделы математики, но и на различные приложения математики к физике, технике, инженерным задачам. Его научные достижения принадлежат алгебре, геометрии, топологии, дифференциальным уравнениям, теории оптимального управления, теории дифференциальных игр. Все, без исключения, полученные им результаты имеют необычайную важность по фундаментальности и глубине. Во многих разделах математики самые важные понятия и методы носят его имя: закон двойственности Понтрягина, характеристические классы Понтрягина, квадраты и степени Понтрягина, принцип максимума Понтрягина. Огромен поток научных работ, в которых применяются разработанные им результаты и методы. Нет никакой возможности проследить все публикации, в которых есть ссылки на его исследования. Творческая гениальность Л.С. Понтрягина проявилась не только в его математических исследованиях. Он оказал огромное влияние на многие поколения научной молодежи, воспитал большое количество учеников, которые стали крупными учеными. Много сил и энергии Лев Семенович тратил на организацию науки. Многогранный и неутомимый труд его получил заслуженное признание: он награжден пятью орденами Ленина, орденом Трудового Красного Знамени, орденом Октябрьской Революции; в 1969 г. ему присвоено звание Героя Социалистического Труда. Л.С. Понтрягин лауреат Сталинской (1941), Ленинской (1962) и Государственной (1975) премий, международной премии им. Н.И. Лобачевского. Он являлся почетным членом Международной федерации астронавтики, почетным доктором Салфордского университета (Англия), иностранным членом Венгерской академии наук, почетным членом Лондонского математического общества.

Л.С. Понтрягин родился в 1908 г. в малообеспеченной семье. Материальное положение семьи не позволило отдать мальчика в гимназию или реальное училище. Поэтому он получил начальное образование в рядовой городской школе. В 14 лет в результате несчастного случая он полностью потерял зрение. Это обстоятельство в определенной степени повлияло на выбор будущей профессии. Уже в восьмом и особенно девятом классах Л.С. Понтрягин серьезно заинтересовался математикой и был ею настолько увлечен, что не мыслил себе другой профессии. В 1925 г. Лев Семенович поступил в Московский университет. Преподаватели сразу же отметили его выдающиеся математические способности и необыкновенное трудолюбие. Он проводил в университете все дни с раннего утра до позднего вечера. Большое значение он придавал системности и основательности обучения. Это проявлялось и в том, как Лев Семенович слушал лекции. Он никогда их не записывал, считая, что записывание лекций только отвлекает слушателя от понимания предмета. Зато перед следующей лекцией он внимательно повторял материал всех предшествующих лекций.

Уже на втором курсе Л.С. Понтрягин выполняет свое первое самостоятельное исследование, которое стало началом большого цикла его топологических работ по теории двойственности. Значение открытого им закона двойственности подтверждается тем фактом, что этот закон получил название закона двойственности Понтрягина.

После окончания университета Лев Семенович работает в Московском университете, а с 1934 г. до конца жизни – более 50 лет – в Математическом институте АН СССР им. В.А. Стеклова. Открытие закона двойственности Понтрягина явилось началом создания общей теории характеров коммутативных топологических групп, послужившей основой новой математической области – топологической алгебры. В 1934 г. на XI Всесоюзном математическом съезде Л.С. Понтрягин выступил с обзорным докладом «Структура непрерывных групп», в котором изложил главнейшие результаты по топологической алгебре, и сформулировал дальнейшую программу развития теории топологических групп. В 1938 г. он издает монографию «Непрерывные группы», в которой были суммированы фундаментальные результаты, полученные им ранее. Эта книга сразу же стала одной из популярнейших математических книг и была издана за рубежом. В 1939 г. Л.С. Понтрягин избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 1941 г. за эту монографию Л.С. Понтрягин был удостоен Сталинской премии.

Одновременно с созданием основ топологической алгебры Л.С. Понтрягин открывает новые основополагающие методы в дифференциальной топологии. В 1936 г. Л.С. Понтрягин создает теорию оснащенных многообразий. Это был первый крупный шаг в развитии методов дифференциальной топологии. Им были заложены основы теории векторных расслоений, открыты характеристические классы, названные позднее характеристическими классами Понтрягина, открыта фундаментальная роль характеристических чисел. Нет сомнения, что созданная Л.С. Понтрягиным теория векторных расслоений и характеристических классов сыграла решающую роль в развитии алгебраической и дифференциальной топологии и будет оказывать плодотворное влияние на ее успехи еще не одно десятилетие.

Несмотря на то, что многие годы Л.С. Понтрягин посвятил работе в чистой математике, он всегда поддерживал теснейшие контакты с учеными из других областей, с физиками и инженерами, а

время от времени он и сам обращался к прикладной тематике, в которой неизменно проявлял фундаментальность в постановках задач, глубину в исследованиях, полноту в решениях. С 1952 г. Л.С. Понтрягин прикладным вопросам уделял основное внимание. Глубокая эрудиция в различных областях математики позволяла ему в каждой задаче выделять самую главную и трудную проблему. Он всегда выбирал такие прикладные задачи, которые до него не поддавались решению.

Триумфом многолетней научной деятельности, естественным ее результатом явилось создание Л.С. Понтрягиным нового математического направления — теории оптимального управления процессами. Это направление имеет огромное значение для практического применения математических методов в современных технологиях и экономике. Основой теории оптимального управления является открытый Л.С. Понтрягиным «принцип максимума» как условие оптимальности управления процессами в природе.

В 1958 г. Л.С. Пон-трягин избирается действительным членом Академии наук СССР, а в 1961 г. вместе с учениками он публикует книгу «Математическая теория оптимальных процессов», которая была удостоена Ленинской премии. Книга переведена на иностранные языки и оказала неоценимое по своему значению влияние на развитие многих областей математики. Естественным применением теории оптимальных процессов является созданная Л.С. Понтрягиным в дальнейшем теория дифференциальных игр, где им были также получены глубокие результаты.

Много сил и энергии Л.С. Понтрягин тратил, занимаясь организацией науки, воспитанием молодежи. Он заведовал отделом обыкновенных дифференциальных уравнений в Математическом институте АН СССР им. В.А. Стеклова, кафедрой оптимального управления на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Он являлся членом бюро Отделения математики АН СССР, председателем комиссии по издательским делам Отделения математики АН СССР, главным редактором журнала «Математический сборник», заместителем председателя Национального комитета советских математиков. С 1970 по1978 г. был членом исполкома Международного математического союза, а с 1970 по1974 г. вице-президентом Международного математического союза. Каждое дело, за которое брался Лев Семенович, он выполнял тщательно, каждый вопрос решал глубоко, отдавая ему не только все свои силы, но и всю свою страсть.

Особую страницу в жизни Л.С. Понтрягина занимала педагогическая деятельность. Им написаны прекрасные учебники по топологии, обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также несколько пособий по математике, предназначенных для школьников. Его глубоко интересовали и вопросы совершенствования школьного математического образования. В том, как он относился к этой проблеме, проявлялась горячая любовь Льва Семеновича к своей Родине, глубокая озабоченность судьбами своего народа. Все его страстные выступления и действия отмечены высокой гражданской принципиальностью. Л.С. Понтрягин неоднократно публиковал свои статьи в журнале «Математика в школе», в других печатных органах, большую роль сыграло его выступление на страницах журнала «Коммунист», в котором он поднял важнейшие проблемы преподавания математики в школе, математического образования. Возглавляя комиссию Отделения математики АН СССР по школьному математическому образованию, Лев Семенович много времени посвящал не только научным, но и организационным вопросам. Его часто можно было видеть и слышать на заседаниях коллегий министерств просвещения (Российского и Всесоюзного), на совещаниях и заседаниях, посвященных вопросам школьной математики. Л.С. Понтрягин до конца своих дней был полон энергии и творческих планов. Он не представлял себе полноценной жизни без упорного каждодневного труда.

К столетию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина в Москве пройдет Международная научная конференция, для участия в которой подали заявки уже более 750 математиков со всего мира. Это лишний раз подтверждает тот факт, что в умах современных ученых Лев Семенович Понтрягин являлся и является неотрывной частью современной математики.

Шеф-редактор С. Островский
Главный редактор Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель ООО «Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя:
ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (499)249 3138
Отдел рекламы: (499)249 9870
Редакция газеты «Математика»:
тел.: (499)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru