#28
октябрь 2008 г.

Электронный информационный спутник газеты «Математика»

Российские математики получили азиатскую «Нобелевскую премию»

10 сентября
СЯНГАН (Гонконг)
РИА Новости

Российские математики Владимир Арнольд и Людвиг Фаддеев были удостоены престижной премии Шао Ифу. Азиатская Нобелевская премия была учреждена сянганским медиамагнатом Шао Ифу в 2002 году. Три приза по миллиону долларов достаются ученым, внесшим существенный вклад в три области: астрономию, математику и медицину или науки о жизни. Владимир Арнольд и Людвиг Фаддеев трудятся в московском и петербургском отделениях Математического института имени В.А. Стеклова Российской академии наук.

ФАДДЕЕВ

Людвиг Дмитриевич — автор более 200 научных трудов, школа Фаддеева является лидирующей в мире по целому ряду направлений математической физики. Его работы вошли в учебники по многим областям математики и физики, постоянно цитируются и используются в научной литературе. Он почетный профессор ряда зарубежных университетов, лауреат Государственной премии СССР, премии имени Д. Хейнемана по математической физике Американского физического общества, награжден золотой медалью имени П. Дирака Международного института теоретической физики в Триесте.

АРНОЛЬД

Владимир Игоревич — один из известных математиков мира. Хотя наибольшую известность он получил в качестве соавтора теоремы Колмогорова–Арнольда–Мозера о стабильности интегрируемых гамильтоновых систем, за свою почти полувековую карьеру он внес важный вклад в развитие целого ряда областей математики, включая теорию динамических систем, теорию катастроф, топологию, алгебраическую геометрию, классическую механику и теорию сингулярностей. Многие из написанных им учебников оказали впоследствии серьезное влияние на развитие новых областей математики. Он яляется лауреатом множества премий, включая Ленинскую премию за 1965 год (совместно с Андреем Колмогоровым), премию Крейфурда (совместно с Луисом Ниренбергом), премию Харви, премию Вольфа и Государственную премию Российской Федерации за 2008 год.

В ЭТОМ ВЫПУСКЕ

ВНИМАНИЕ, АНОНС!

Читайте в № 21 и № 22 газеты «Математика»

Тема № 21: Школьный музей математики

Приходилось ли вам слышать когда-нибудь о такой диковинной вещи, как школьный музей математики? Если нет, спешите посетить его, пусть пока и виртуально, открыв номер газеты. В нем нет древних математических трактатов, старинных изданий, раритетов. Многое в нем сделано руками учащихся. Этим он и ценен — своей образовательной стороной. У него есть перспективы — ведь каждый год приходят новые ученики и приносят свои работы. Направлений работы много. Было бы желание.

Тема № 22: Внимание, задача!

Решение задач — основной вид математической деятельности. Задачи ученик решает с первого дня учебы в школе до самого последнего — до экзамена. Интересно подсчитать, сколько всего прорешивает задач за все годы обучения среднестатистический ученик! Задача же учителя — сделать так, чтобы все эти задачи «пошли на пользу» и при этом было нескучно. Как этого добиться? Ответ вы обязательно найдете на страницах номера.

Код бланка Протокол 1000108 Строка 17 Регион Страница 1 из 2

Предмет Математика Номер варианта

Эксперт Код эксперта

Ода ....

Немного скучно и грустно немного
Какая мне выпадет в жизни дорога?
ЕГЭ всё решит и рассудит за нас
И вам напишу про него я сейчас...
Задания А – все возможно решить,
Но только советую вам не спешить
Забыл О.Д.З. или знак потерял?
Мужайся дружок, ты конкретно попал!
Задания В – тут мозги напрягай;
Высчитывай, мучайся, думай, считай
Получишь ответ – значит ты молодец
Плохое число? Да, вот это конец!
Надежда одна на задания С
И ужас мелькнул у меня на лице
Что это такое? С чего начинать?
Начну я, пожалуй, с заданья С5
Какой-то крючочек и циферка три
Вот x, вот он игрек y и двойка, смотри
От силы пятёрку я цифр поняла,
Вот это заданье! Вот это дела!
Все знанья мои превратились в кашу
Гляжу я с тоской на отличницу Машу
Наверно прекрасно всё знает она
Моя голова лишь заботой полна
Родителям как на глаза показаться?
Теперь мне придется всё лето скрываться!
Пойду на работу, ведь польза есть тут
За деньги потом поступлю в институт
Я буду учиться на менеджмент там
Дефолт и инфляцию миру я дам
Прогноз нехороший конечно друзья
Спокойно-спокойно, шутила все я.
Уж очень мне нужно учиться отлично
Чтоб в нашей стране всё смотрелось прилично
Ведь должен России же быть, гражданин
Не как алкоголик, а как господин!

Сложнейших заданий мне в тесте не счесть
Должна защитить я гимназии честь
Я всё на 100 баллов должна написать
А-то меня будет учитель ругать.
Но наш педагог самый лучший на свете
И в школах   ших прекрасные дети
Все-все благодарны мы учителям
Улыбок и счастья хотим дарить вам
Подходит к концу отведённое время
А листик для С – для меня только бремя
Решила я, что уж ему пропадать
И вам эту оду пришлось написать
Спасибо за то, что вы это читали
Простите меня если сильно устали!

У всех я прошу очень-очень прощенья
Надеюсь на ваше, друзья, снисхожденье
Учителю – слава! хочу я кричать
Ведь адский ваш труд все должны почитать
Вы нас охраняете, любите, грете
И даже ругаться порой не умеете
Мы миром всем, дружно кричим вам „УРА!“
Но нам к сожаленью прощаться пора...
Вы с нами одиннадцать лет провели
И делали всё, что лишь только могли
Но вот прозвенел уж последний звонок
Закончен для нас наш последний урок
И даже экзамен подходит к концу
Стекает слеза у меня по лицу.

Прощайте, прощайте! Захлопнута дверь
И к вам не вернёмся, увы, мы теперь
Последние почести школьного мира
На лист занесла   Кира.

Прошу вас лишь строго меня не судить
И все речевые ошибки простить!

При недостатке места для ответа используйте оборотную сторону бланка
TestReader 4.0 Network 4.0.47.5671.071 (SP - 2) <04-06-08>

Трудности перевода

Интервью главного редактора газеты «Математика» Л.О. Рословой с руководителем отдела шкалирования и статистики Федерального центра тестирования В.В. Овчинниковым

Практически каждый учитель, прошедший со своими учениками горнило ЕГЭ, высказывает обиду на то, что он не может аргументированно объяснить ученику, почему он получил ту или иную отметку, как повлияло на отметку и суммарный балл выполнение или невыполнение того или иного задания, почему у его одноклассника аналогичная ситуация с выполненными заданиями выражается иным количеством баллов и т.п. И основная проблема здесь в не очень понятной закрытости «кухни» превращения первичных баллов в баллы по стобалльной шкале. Мы пытаемся снять завесу секретности с этих превращений, участниками которых ежегодно становятся около миллиона выпускников школ вместе со своими учителями и родителями, и обращаемся с просьбой рассеять туман и сделать ситуацию более понятной к руководителю отдела шкалирования и статистики Федерального центра тестирования **Всеволоду Валентиновичу ОВЧИННИКОВУ**.

Л.Р. Всеволод Валентинович, понять суть превращений одних баллов в другие хотят все предметники. Ко мне не раз обращались коллеги-литераторы, биологи и т.п., считая, что уж кто-кто, а математики должны понимать, что происходит. Учителя математики, действительно, считают это зоной своей ответственности, пытаются разобраться сами, строят графики и ищут закономерности. В рамках имеющихся у них данных. Вот один такой пример: методист строит график зависимости баллов по стобалльной шкале от первичных баллов (см. статью А.В. Семенова «7 вопросов. Без ответов?», № 18/2008). И дальше он недоумевает: почему изменение на один первичный балл дает изменение до 10 баллов в первой четверти шкалы, 3–2 балла — во второй четверти, 1 балл — в третьей и 2 балла в конце? Давайте попытаемся сначала разобраться с математикой.

В.О. Дело в том, что первичные и баллы по стобалльной шкале измеряют принципиально разные величины. Первичные баллы просто показывают, сколько заданий выполнил учащийся. А «стобалльные оценки» показывают уровень подготовленности по предмету. Зная, например, только первичный балл, невозможно вычислить результат на стобалльной шкале.

Л.Р. И как это объяснить тем, кто с математикой не знаком? В частности, детям и родителям.

В.О. Действительно, объяснить эти превращения довольно сложно. Можно провести следующую аналогию. Представим, что тест — это лестница. Каждое задание теста — кусочек этой лестницы. Если задание оценивается в 1 балл, как, например, большинство заданий частей A и B, то это задание представляет собой одну ступень лестницы. Если задание оценивается в 2 и более баллов, например, задания части C, то это задание представляет собой 2 и более подряд идущих ступеней. Выполнив очередное задание, мы поднимаемся по этой лестнице. Так вот, первичные баллы — это количество пройденных ступеней. А баллы на стобалльной шкале — та высота, на которую мы поднялись над землей. Хочу оговориться, что это довольно приблизительная аналогия, не учитывающая некоторых моментов. Но, тем не менее, она дает возможность понять разницу между первичными баллами и баллами стобалльной шкалы.

Л.Р. Получается лестница со ступеньками разной высоты. Как же определяется высота каждой ступеньки? Как я понимаю, она зависит от решаемости конкретного задания, т.е. трудность определяется по факту выполнения. И в разные годы решаемость одного и того же задания может быть разной. Или это не так?

В.О. Да, Вы совершенно правы, ступени могут быть разной высоты. Для определения высоты каждой ступени используется определенная модификация метода максимального правдоподобия. Если на пальцах — составляется довольно громоздкая функция, зависящая от высоты каждой ступени, и ищутся такие значения высот, при которых эта функция достигает своего максимума. Да, действительно, каждый год решаемость одного и того же задания может быть разной. Это связано с тем, что получающиеся шкалы не имеют нуля, т.е. если ко всем трудностям заданий и ко всем оценкам уровней подготовленности учащихся одного года прибавить одно и то же число, ничего не изменится. Но точно так же, как строится единая шкала для различных вариантов КИМ одного года, можно построить единую шкалу для разных лет. И на этой шкале трудности одной и той же ступени в разные годы должны быть близки друг к другу.

Л.Р. А как осуществляется перевод первичных баллов в 100-балльные?

В.О. Общая схема действий такова:

1. Для каждого варианта КИМ строится матрица ответов, в которой в i-й строке и в j-м столбце расположен первичный балл i-го человека за j-е задание.
2. По каждой из этих матриц строится функция правдоподобия, зависящая от уровней подготовленности участников ЕГЭ, решавших данный вариант КИМ, и от трудностей заданий данного КИМ.
3. Для каждой функции правдоподобия ищутся те значения ее аргументов, при которых она принимает максимально возможное значение. Найденные значения и будут оценками уровней подготовленности участников ЕГЭ и трудностями заданий данного КИМ. Но пока для каждого КИМ существует своя шкала, и сравнивать результаты участников, решавших разные КИМ, невозможно.
4. Строится единая для данного года шкала оценок уровней подготовленности участников и трудностей заданий. Теперь можно корректно сравнивать между собой результаты абсолютно всех участников.
5. С помощью линейного преобразования, формула которого была опубликована, оценки уровней подготовленности участников ЕГЭ с этой единой шкалы переводятся на 100-балльную.

Л.Р. А каким требованиям должны удовлетворять КИМ, чтобы можно было применять такое шкалирование?

В.О. На этот вопрос очень сложно ответить коротко. Попробую перечислить основные моменты. Задания, из которых состоит КИМ, должны быть примерно того же уровня сложности, что и уровень подготовленности выпускников, их решающих. Естественно, что подобный подход практически невозможно реализовать при проведении тестирования в бланковой форме, но стремиться к этому нужно. Не должно быть ни очень легких, ни очень сложных заданий. Задания не должны оцениваться большим количеством первичных баллов. Исходя из опыта Федерального центра тестирования, можно сказать, что первичный балл за задание не должен превышать 3–4 баллов. Есть еще довольно много различных требований, но они носят специфический характер, и я думаю, перечислять их здесь будет неуместно.

Л.Р. А эта ситуация характерна для всех предметов: формула едина для всех?

В.О. Нет, не для всех. Иностранные языки обрабатываются иначе. Эти предметы были выделены в отдельную группу.

Л.Р. Одна из задач ЕГЭ в части вступительного экзамена в вузы — это как можно точнее дифференцировать учащихся по уровню их подготовки. Для этого предлагаются задания различной трудности, отражающие различную глубину владения материалом курса. Тогда почему задания частей А и В изначально имеют одинаковую стоимость — 1 балл? Ведь эти задания различаются не только формой ответа: задания части В выполняются хуже и потому, что у тех, кто не может их выполнить, нет вариантов ответа, из которых можно выбирать случайным образом, и потому, что они реально труднее заданий части А.

В.О. На самом деле, эти задания имеют разные стоимости. А то, о чем Вы говорите, является не стоимостью, а количеством частей в задании, или, если угодно, ступеней. А стоимость или трудность задания — в случае, если задание состоит из одной части (ступени), — это высота ступени. Именно поэтому, даже если задания состоят из одинакового количества ступеней, мы не можем делать вывод о том, что они одинаковы по трудности.

Л.Р. Как я понимаю, при пересчете на стобалльную шкалу задания «расходятся» по трудности естественным путем — одни задания решаются лучше, другие хуже. Но отметка-то школьная выставляется по первичным баллам. И значит, трудность задания здесь никак не учитывается.

В.О. Это заблуждение. На самом деле, трудности учитываются. И школьная отметка выставляется исключительно по стобалльным, а не по первичным баллам. Исключение составляет только школьная отметка по алгебре. Это связано с тем, что при выставлении оценки за выпускной экзамен необходимо не учитывать некоторые задания теста по математике.

Л.Р. Может быть, стоит отказаться от первичных баллов? Ведь, по сути, это количество выполненных заданий. Зачем нужна эта «двойная бухгалтерия»? Может быть, имеет смысл и здесь исходить из стобалльной шкалы и уже эти баллы переводить в школьную отметку? Конечно, с учетом тех заданий, которые относятся к курсу алгебры и начал анализа. Мне кажется, если выпускник получит «школьные» баллы и «вузовские» в единой шкале и эти баллы будут расходиться, то ему не надо будет объяснять, что вузовские баллы оказались выше потому, что он, забывшись, решил, например, геометрическую или текстовую задачу, которая в школьной отметке не учитывается. Если шкала одна, то и сравнивать легко.

В.О. Да, здесь с Вами невозможно не согласиться. И в Европе, и в Америке человеку, сдававшему тест, выдается на руки только одно число — его балл, без какой-либо детализации. Но в связи с тем, что с самого начала проведения ЕГЭ выпускник получал на руки детальную информацию о своих результатах вплоть до первичных баллов за каждое из заданий, отказываться от этого в настоящее время нецелесообразно. Кроме того, информация о выполнении каждого из заданий КИМ может понадобиться выпускнику для подачи апелляции.

Л.Р. И последний вопрос: будут ли в процедуру шкалирования вноситься какие-то изменения в будущем?

В.О. Я не готов ответить на этот вопрос, так как Федеральный центр тестирования, сотрудником которого я являюсь, подчиняется Рособрнадзору, и вопросы подобного рода выносятся на обсуждение в Рособрнадзор, который и принимает соответствующие решения.

Л.Р. Всеволод Валентинович, я благодарю Вас за ответы на мои вопросы, которые сформировались при общении с учителями и методистами, прошедшими через процедуру единого государственного экзамена. Хочется верить, что мы с Вами внесли некоторую ясность в ту его часть, которая связана со шкалированием результатов выполнения экзаменационной работы. Но возможно, вопросы у учителей остались, и я надеюсь, что Вы не откажетесь вернуться к обсуждению этой проблемы, если в этом возникнет потребность.

В. ВАВИЛОВ,
Москва

Улица А.Н. Колмогорова

19 мая 2008 года в г. Ярославле была торжественно открыта улица имени великого ученого, учителя, гуманиста и патриота Андрея Николаевича Колмогорова. Это произошло в первый день работы шестых научных Колмогоровских чтений, программа работы которых содержит как научные исследования во многих областях математики, так и в теории и методике обучения математике, по истории математики и математического образования. Открытие улицы А.Н. Колмогорова было инициировано Ярославским государственным педагогическим университетом им. К.Д. Ушинского (В.В. Афанасьев, Е.И. Смирнов, Р.З. Гушель и др.) и Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова (В.А.Садовничий, В.М. Тихомиров и др.) и поддержано городскими властями.

Открытие улицы с таким названием именно в Ярославле не является случайностью, так как раннее детство А.Н. Колмогорова прошло на Ярославской земле — в Туношне и в Ярославле на Пробойной улице, ныне Советской, где в 2003 году на одном из домов была установлена мемориальная доска с надписью: «В этом доме в 1903–1910 годах жил выдающийся математик академик Андрей Николаевич Колмогоров».

А.Н. Колмогоров был первопроходцем во многих начинаниях и делах, в решении труднейших задач, стоявших перед человечеством и не поддававшихся усилиям многих ученых с мировыми именами. В научных исследованиях им спроектированы и проложены огромные проспекты и широкие дороги, не использовать которые человечество и современные исследователи уже не могут. Конечно, образно говоря, им были сконструированы, или только намечены, и многие улицы, переулки, тропы, но... не было тупиков.

Как очень верно заметил В.А. Успенский в своей статье, что если в словах Н.В. Гоголя о Пушкине заменить «поэт» на «ученый», а Пушкин» на «Колмогоров», то мы получим точную характеристику Колмогорова. Вот мысль Н.В. Гоголя: «При имени Пушкина тотчас осеняет мысль о русском национальном поэте... Пушкин есть явление чрезвычайное...»

На стене одного из новых домов открытой в г. Ярославле улицы прикреплена памятная доска, на которой написано: «Улица названа в честь нашего земляка, выдающегося математика, академика, Героя Социалистического Труда Колмогорова Андрея Николаевича (25.IV.1903 – 20.X.1987)».

Т. БАТАЕВА,
г. Белгород

Плюс один балл

С большим вниманием прочитала статью «Весенняя лихорадка» (№ 9, 2008). Согласна со всем, что затронуто в статье. Автор упустил самую главную причину в нежелании учеников учиться. Цитирую: «Есть ученики, которые не хотят учиться, и их становится все больше. А есть ученики, которые не могут усвоить материал по различным педагогическим причинам...»

Я считаю, что с введением ЕГЭ допустили самую главную ошибку — плюс 1 балл. Этот один балл и деньги родителей открыли двери вузов для нерадивых учеников. Учйтеля не один год «склоняют» за двойки, которые получили его ученики на экзаменах, а эти ученики — уже студенты или «вылетели» после первой сессии, но все-таки поучились в вузе!

Когда стали вводить ЕГЭ, я, честно говоря, обрадовалась, так как считала, что если ученик получит «2» на ЕГЭ, ни о каком вузе не будет речи. Но деньги-то никто не отменил, и в вузах тоже работают люди, которым нужны деньги. Получился замкнутый круг, вернее — порочный круг.

Надеялась, что в этом году уберут «плюс один балл» для того, чтобы те ученики, которые могут освоить школьную программу, «взялись за ум и начали работать». Ничуть не бывало! «Плюс один балл» оставили, и он изнутри разъедает наше образование. Принцип «три пишем, два в уме» из старой школы спокойно перенесли в ЕГЭ.

Думаю, что необходимо изменить подход к выдаче аттестатов. Господин В. Болотов считает, что «нерадивые ученики не должны остаться без аттестата». Но почему их нельзя выдавать с двойками? В вузы в этом случае для лентяев дорога будет закрыта. В них будут учиться ребята, которые поняли необходимость упорного труда в достижении цели. Тогда мы не будем со страхом идти в поликлиники, больницы, к юристам, боясь и часто встречая там своих бывших лентяев, получивших кое-как высшее образование.

Я считаю, что нельзя оценивать работу учителя по результатам ЕГЭ, полученным его учениками, еще по одной причине. Введено всеобщее среднее образование, то есть в 10-й класс автоматически зачисляются все ученики, окончившие 9-й класс. Очень часто дети с задержкой психического развития (по недосмотру врачей, выдавших справку «здоров») учатся в одном классе со своими здоровыми сверстниками. Родители отказываются пройти психолого-медико-педагогическую комиссию, — и нет возможности перевести ребенка в спецшколу или коррекционный класс. Такой ребенок в силу своего развития никогда не сдаст ЕГЭ, после экзамена его психологическое состояние еще ухудшится от шока, так как ему все время (жалея) ставили «3» и вдруг — «два». Жаль учителей и еще больше жаль таких учеников. Поверьте, таких детей все больше, то ли из-за экологии, то ли из-за поголовного пьянства и наркомании. Несчастные больные дети становятся головной болью для учителей.

Нельзя сравнивать школы с углубленным изучением математики, где на математику выделено до 10 учебных часов, с теми школами, в которых она изучается по четырехчасовой программе. А ведь все больше ругают учителей именно из этих школ, так как их ученики сдают ЕГЭ хуже. Администрация управления образованием почему-то не обращает внимания на этот факт должного внимания во время составления общих статистических отчетов. Даже в одной школе могут быть классы с углубленным изучением математики, гуманитарные и общеобразовательные, в которых разное количество часов по математике. Естественно, что общеобразовательные классы с 4–5 часами математики (то есть 2,5–3 часа алгебры) имеют меньше возможности для подготовки к ЕГЭ, но ругают учителей, ведущих эти классы, на общих основаниях, как плохо подготовивших учеников к экзаменам. Я считаю, что обязательным экзамен по математике нужно делать в профильных классах и в классах с углубленным изучением математики, а в общеобразовательных сдавать математику по выбору.

ФОТО НА КОНКУРС

Не плачь, девчонка! Пройдет ЕГЭ...
Автор: Т.М. Перевезенцева, средняя школа № 7, г. Апача, Камчатский край

П. СЕМЕНОВ,
Москва

Что делать, кто виноват, или Структура заданий С5 в ЕГЭ-2008

Зная настоящее, мы часто ставим перед собой два хорошо известных вопроса и пытаемся найти ответы на них. Вопросы эти — «Что будет?» и, несколько реже, «Что было?».

Другими словами, в первом случае, по нынешнему положению некоторого процесса, мы стараемся получить максимум информации о последующих его состояниях. В математических задачах это выглядит примерно так: «Дано то-то и то-то. Найти, что же получится в результате того, что нам дано». Более общие и разговорные версии — «Что нас ожидает?» и «Что делать?».

Во втором случае, анализируя имеющееся положение дел, мы пробуем восстановить прошлое и выяснить причины ситуации, сложившейся к настоящему моменту. «Как мы дошли до жизни такой?», «Кто виноват?» — вот типичные бытовые варианты возникающих вопросов.

Задания С5 в июньских вариантах ЕГЭ-2008 по математике, в самых общих чертах, относятся к проблемам второго типа. Несколько конкретнее: Пусть для последовательности чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$ задан некоторый способ получения очередного члена a_n по предыдущим членам $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Можно ли, зная, скажем, a_{2008}, с уверенностью сказать, чему равно a_{28}?

С уверенностью можно, пожалуй, сказать только то, что это — пока слишком нечеткая постановка вопроса. Чтобы придать ей большую осязаемость, напомню сначала формулировку задания С5 из демоверсии ЕГЭ-2008.

Решите уравнение $f(g(x)) + g(3 + f(x)) = 30$, если известно, что

$$f(x) = 0{,}5x^4 - 4x + 5 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 25, & x \ge 4, \\ 2^x + \dfrac{9}{5-x}, & x < 4. \end{cases}$$

Перечислим основные понятия, используемые в постановке вопроса этой задачи и при ее решении (см. www.fipi.ru): уравнение, заданное в функциональных терминах, исследование функции, нахождение множества значений функции. Неявно также используется композиция двух функций, но при этом никаких специальных сведений или же учебных умений относительно сложной функции вида $y = f(g(x))$ ни в условии, ни в решении не используется.

Сохраним эти же базовые понятия и при конкретизации задачи про поведение последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$ Использовать при построении последовательности чисел две или три функции формально не запрещено, но, скорее всего, является перебором для ЕГЭ. Значит, функция будет *одна*, и тогда «композиционный ряд» возникает самым естественным образом:

$$a_1,\ a_2 = f(a_1),\ a_3 = f(a_2) = f(f(a_1)), \ldots$$

Это широко известная в современной математике (символическая динамика, фрактальная геометрия, теория хаоса и т.п.) конструкция — последовательность итераций фиксированной функции f. Итак, уточним сформулированный выше вопрос.

Пусть $a_1,\ a_2 = f(a_1),\ a_3 = f(a_2) = f(f(a_1)), \ldots$

Можно ли, зная, скажем, a_{2008}, *однозначно восстановить значения всех предыдущих чисел* $a_{2007}, a_{2006}, a_{2005}, \ldots$?

Для составления конкретной задачи более корректно спросить, как именно следует задать функцию f для того, чтобы такое однозначное восстановление действительно было осуществимо? Здесь возникает еще одна базовая для всей конструкции идея — идея *периодичности*. Дело в том, что невозможно рассчитывать на восстановление a_{2007} по a_{2008}, a_{2006} по a_{2007}, a_{2005} по a_{2006} и т.д. каждый раз новым способом. Другими словами, процесс восстановления разумно сделать *периодическим*. Как только, скажем, $a_{2005} = a_{2008}$, то далее вся процедура определения предыдущих членов последовательности станет периодической:

$$a_{2004} = a_{2007},\ a_{2003} = a_{2006},\ a_{2002} = a_{2005} = a_{2008},$$
$$a_{2001} = a_{2004} = a_{2007} = \ldots$$

Перейдем к конкретным формулировкам.

Примеры заданий

Пример 1. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 29$. Найдите $a_7 + a_{17} + a_{27}$, если известно, что $a_{30} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+12}{6-x}, & \text{если } x < 2, \\ 3\sin(0{,}1\pi x + 1{,}3\pi) - 3, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$$

Пример 2. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{23}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 22$. Найдите $a_5 + a_4$, если известно, что $a_{23} = 0$, а

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x+8}{x-4}, \text{ если } x<4,\\ \sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-3}}+\sqrt{\dfrac{16x-63}{x-2}}, \text{ если } x\ge 4.\end{cases}$$

Пример 3. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{26}$ верны равенства $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, $a_4 = f(a_3)$, ..., $a_{26} = f(a_{25})$. Найдите $a_9 + a_{10}$, если известно, что $a_{25} = 0$, а

$$f(x)=\begin{cases}|x+9|-1, \ x\le 15,\\ \dfrac{x(x-16)}{x^2-210}, \ x>15.\end{cases}$$

Пример 4. Функция f задана равенством

$$f(x)=\begin{cases}3+2x-x^2, \ x<2,\\ 0{,}1\left(1-|x-14|\right), \ x\ge 2,\end{cases}$$

а для рациональных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{29}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \ldots, 28$. Найдите a_{11}, если известно, что $a_{28} = 0$.

Примеры 1 и 2 цитируют методические указания, разработанные федеральной предметной группой (ФПГ) по математике, которые выдавались членам экспертных региональных групп при проверке работ учащихся. Примеры 3 и 4 взяты из предварительных авторских разработок в период обсуждения предполагаемых типов заданий С5 и формулировок их условий. В реальном ЕГЭ в июне 2008 года использовались только различные версии примеров 1 и 2. Примеры 3 и 4 по различным причинам не были приняты для последующей разработки, но на самом деле являлись базой для получения итоговых примеров 1 и 2.

В примерах 1, 3, 4 в результате получается числовая последовательность с периодом 3, а в примере 2 последовательность оказывается 2-периодической.

Ответы и решения

1. –4.

1. Так как $a_{30} = 0$ и $a_{30} = f(a_{29})$, то a_{29} — корень уравнения $f(x) = 0$.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ \dfrac{2x+12}{6-x}=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ \sin(0{,}1\pi x+1{,}3\pi)=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-6\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ 0{,}1\pi x+1{,}3\pi=0{,}5\pi+2\pi n, \ n\in \boldsymbol{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-6\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x=20n-8, \ n\in \boldsymbol{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-6\\ x\in\{12;\ 32;\ 52;\ 72;\ \ldots\}.\end{array}\right.$$

Так как

$$3\sin(0{,}1\pi x + 1{,}3\pi) - 3 \le 0$$

и

$$\frac{2x+12}{6-x}=-2+\frac{24}{6-x}<-2+\frac{24}{6-2}=4,$$

то $f(x) < 12$ при всех x. Так как $a_{29} = f(a_{28})$, то $a_{29} < 12$. Значит, $a_{29} = -6$.

2. Так как $a_{29} = -6$ и $a_{29} = f(a_{28})$, то a_{28} — корень уравнения $f(x) = -6$.

$$f(x)=-6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ \dfrac{2x+12}{6-x}=-6\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ \sin(0{,}1\pi x+1{,}3\pi)=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ 2x+12=-36+6x\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ 0{,}1\pi x+1{,}3\pi=-0{,}5\pi+2\pi n, \ n\in \boldsymbol{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ x=12\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x=20n-18, \ n\in \boldsymbol{Z}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{2;\ 22;\ 42;\ \ldots\}.$$

Так как $a_{28} = f(a_{27})$, то $a_{28} < 22$. Значит, $a_{28} = 2$.

3. Число a_{27} является корнем уравнения $f(x) = 2$. Так как $f(x) \le 0$ при $x \ge 2$, то

$$f(x)=2 \Leftrightarrow \frac{2x+12}{6-x}=2 \Leftrightarrow x=0.$$

Значит, $a_{27} = 0$, и, продолжая аналогично, получаем, что

$$a_{26}=-6,\ a_{25}=2,\ a_{24}=0,\ \ldots,\ a_{17}=-6,\ \ldots,$$
$$a_9=0,\ a_8=-6,\ a_7=2.$$

Значит, $a_7 + a_{17} + a_{27} = -4$.

2. –2.

Способ I. 1. Исследуем функцию f. Так как

$$\frac{4x+8}{x-4}=4+\frac{24}{x-4},$$

то при $x < 4$ она убывает. Так как

$$\frac{x-5}{x-3}=1-\frac{2}{x-3},\quad \frac{16x-63}{x-2}=16-\frac{31}{x-2},$$

то при $x \ge 4$ возрастают оба подкоренных выражения.

При этом
$$\frac{16x-63}{x-2}\ge 16-\frac{31}{4-2}>0.$$
Так как степенные функции $y=\sqrt[5]{x},\ \ y=\sqrt{x}$ возрастают, то возрастают слагаемые суммы
$$\sqrt[5]{\frac{x-5}{x-3}}+\sqrt{\frac{16x-63}{x-2}}.$$
Поэтому возрастает и сама сумма, то есть функция f. При неограниченном убывании $x < 4$ значения $f(x)$ приближаются к 4, а при неограниченном возрастании $x \ge 4$ значения $f(x)$ приближаются к $\sqrt[5]{1}+\sqrt{16}=5$. Для построения эскиза графика (рис. 1) найдем несколько характерных значений функции:
$$f(-2) = 0,\ f(0) = -2,\ f(4)=-1+\sqrt{0,5}<0,$$
$$f(5)=\sqrt{\frac{17}{3}}>0.$$

Итак, уравнение $f(x)=0$ имеет ровно два корня:

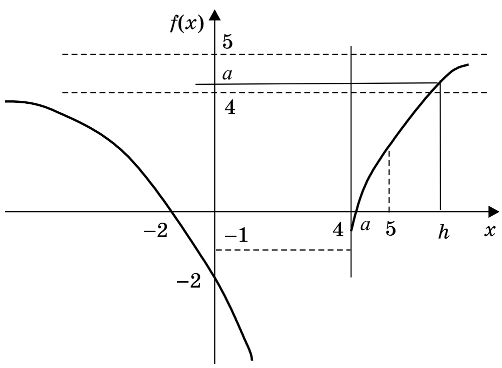


Рис. 1

$x = -2$ и $x = a$, $4 < a < 5$.

2. Так как $a_{23} = 0$ и $a_{23} = f(a_{22})$, то $a_{22} = -2$ или $a_{22} = a$. Допустим, что $a_{22} = a$. Тогда уравнение $f(x) = a_{22} = a$ имеет единственный корень $x = b$ и при этом $b > 5$. Это означает, что $a_{21} = b$. Но уравнение $f(x) = a_{21} = b$ вообще не имеет корней, то есть не существует a_{20}. Противоречие.

3. Значит, $a_{22} = -2$. Найдем a_{21} — корень уравнения $f(x) = a_{21} = -2$. Но это уравнение имеет единственный корень $x = 0$. Значит, $a_{21} = 0$. Зная a_{21}, аналогично находим $a_{20} = -2$, затем $a_{19} = 0, \ldots$, $a_5 = 0$, $a_4 = -2$. Значит, $a_5 + a_4 = -2$.

Анализ приведенного решения показывает, что его можно оформить и без столь детального исследования функции f. Оказывается, что не нужны ни монотонность, ни асимптоты, ни (неявным образом использованная) непрерывность. Достаточно ограничиться только оценками сверху для множества значений $E(f)$ и для множества значений функции $y = f(f(x))$, то есть для итерации $f\circ f$. Грубо говоря, уже вторая итерация $f\circ f$ «затягивает» все значения в луч $(-\infty;\ 4)$, а там подсчеты легко провести, решая простые дробно-линейные уравнения.

Способ II. 1. Так как $a_2 = f(a_1)$, то a_2 принадлежит множеству значений функции f. Оценим это множество сверху.

Если $x < 4$, то $x - 4 < 0$, и $\dfrac{4x+8}{x-4}=4+\dfrac{24}{x-4}<4.$

Если $x \ge 4$, то $\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-3}}=\sqrt[5]{1-\dfrac{2}{x-3}}<1$, а
$$\frac{16x-63}{x-2}=16-\frac{31}{x-2}\ge 16-\frac{31}{4-2}=0,5>0.$$

Следовательно, $\sqrt{\dfrac{16x-63}{x-2}}$ определен и
$$\sqrt{\frac{16x-63}{x-2}}=\sqrt{16-\frac{31}{x-2}}<4.$$

Значит, $\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-3}}+\sqrt{\dfrac{16x-63}{x-2}}<5$ при $x\ge 4$. Поэтому $f(x) < 5$ для всех x и $a_2 < 5$.

2. Так как $a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$, то a_3 принадлежит множеству значений функции $y = f(f(x))$. Оценим его сверху.

Если $f(x) < 4$, то $f(f(x)) < 4$.

Если $4 \le f(x) < 5$, то $\sqrt[5]{\dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}}<0$, а
$$\sqrt{\frac{16f(x)-63}{f(x)-2}}=\sqrt{16-\frac{31}{f(x)-2}}<4.$$

Значит, $f(f(x)) < 4$ для всех x. Поэтому $a_3 < 4$ и, значит, $a_4 = f(a_3) < 4$. Аналогично, $a_5 = f(a_4) < 4, \ldots$, $a_{22} = f(a_{21}) < 4$.

3. Так как $a_{23} = 0$ и $a_{22} < 4$, то
$$f(a_{22}) = a_{23} \Leftrightarrow \frac{4a_{22}+8}{a_{22}-4}=0 \Leftrightarrow a_{22} = -2.$$

Так как $a_{22} = -2$ и $a_{21} < 4$, то
$$f(a_{21}) = a_{22} \Leftrightarrow \frac{4a_{21}+8}{a_{21}-4}=-2 \Leftrightarrow 4a_{21} + 8 = 8 - 2a_{21} \Leftrightarrow \Leftrightarrow a_{21} = 0.$$

Аналогично, $a_{20} = -2$, $a_{19} = 0$, $a_{18} = -2$, $a_{17} = 0, \ldots$, $a_5 = 0$, $a_4 = -2$. Значит, $a_5 + a_4 = -2$.

3. 16.

1. Пусть $g(x) = |x + 9| - 1$, $x \le 15$. Тогда $g(x)=0 \Leftrightarrow x=-10$ или $x=-8$, и $g(x)\ge -1$ для всех x. При этом $g(-9) = -1$, то есть $g_{\text{наим}} = -1$.

Пусть $h(x)=\frac{x(x-16)}{x^2-210}$, $x>15$.

Тогда $h(x)=0 \Leftrightarrow x=16$, и

$$h'(x)=\frac{(2x-16)\left(x^2-210\right)-2x\left(x^2-16x\right)}{\left(x^2-210\right)^2}=$$

$$=\frac{4\left(4x^2-105x+840\right)}{\left(x^2-210\right)^2}>0,$$

так как $x^2>210$, $4>0$ и $D=105^2-16\cdot 840=$ $=105(105-16\cdot 8)<0$. Значит, функция h возрастает и поэтому $h(x)>h(15)=-1$. Итак, функция f имеет ровно 3 нуля ($x=-10$, $x=-8$, $x=16$) и $f(x)\geq -1$ для всех x.

2. По условию все числа a_2, a_3, ..., a_{26} являются значениями функции f. В частности, $a_n \geq -1$, $n=2, 3, \ldots, 26$. Найдем a_{24}. По условию $f(a_{24})=a_{25}$ и $a_{25}=0$, то есть $a_{24}=-10$, или $a_{24}=-8$, или $a_{24}=16$. Так как $a_{24}\geq -1$, то $a_{24}=16$.

3. По условию $f(a_{23})=a_{24}$. Значит, $f(a_{23})=16$. Если $x>15$, то $16x>210$, $x^2-210>x^2-16x$ и поэтому $h(x)<1$. Значит, уравнение $f(x)=h(x)=16$ не имеет корней. Если $x\leq 15$, то

$$f(x)=|x+9|-1=16 \Leftrightarrow x=8 \text{ или } x=-26.$$

Так как $a_{23}\geq -1$, то $a_{23}=8$.

Аналогично получаем, что a_{22} есть корень уравнения $g(x)=8 \Leftrightarrow |x+9|-1=8$, то есть $a_{22}=-18$ или $a_{22}=0$. Так как $a_{22}\geq -1$, то $a_{22}=0$.

Аналогично, $a_{21}=16$, $a_{20}=8$, $a_{19}=0$, $a_{18}=16$, $a_{17}=8$, $a_{16}=0$, ... и т.д. с периодом 3. Значит, $a_{10}=0$, $a_9=16$.

4. 3.

1. Пусть $g(x)=3+2x-x^2=(x+1)(3-x)$, $x<2$ и $h(x)=0{,}1(1-|x-14|)$, $x\geq 2$. График функции g (рис. 2) — это часть параболы, у которой ветви вниз, вершина в точке (1; 4), пересечение с осью абсцисс — точка (–1; 0), с осью ординат — точка (0; 3). На отрезке [2; 14] график функции h — это отрезок с концами (2; –1,1) и (14; 0,1), а на промежутке $[14; +\infty)$ совпадает с прямой $y=0{,}1(15-x)$. На отрезке [2; 14] функция h возрастает, на $[14;+\infty)$ она убывает, ось абсцисс график пересекает в точках (13; 0) и (15; 0). Так как $g_{\text{наиб}}=4$ и $h_{\text{наиб}}=0{,}1$, то $f_{\text{наиб}}=4$.

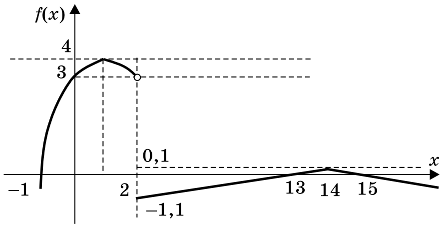


Рис. 2

2. По условию $f(a_{27})=a_{28}=0$, то есть a_{27} равно или -1, или 13, или 15. Но равенства $a_{27}=13$ и $a_{27}=15$ невозможны, так как $a_{27}=f(a_{26})$ и $f_{\text{наиб}}=4$. Следовательно, $a_{27}=f(a_{26})=-1$.

3. Решим уравнение $f(x)=-1$.

Если $x\geq 14$, то $0{,}1(15-x)=-1$, $x=25$.

Если $2\leq x\leq 14$, то $0{,}1(x-13)=-1$, $x=3$.

Если $x<2$, то $3+2x-x^2=-1$, $x=1-\sqrt{5}$.

Поэтому $a_{26}=f(a_{25})$ равно или 25, или 3, или $1-\sqrt{5}$. Равенство $a_{26}=1-\sqrt{5}$ невозможно, так как a_{26} — рационально, а число $1-\sqrt{5}$ иррационально. Равенство $f(a_{22})=25$ невозможно, так как $f_{\text{наиб}}=4$. Следовательно, $a_{26}=f(a_{25})=3$.

4. Решим уравнение $f(x)=3$. Так как $h_{\text{наиб}}=0{,}1$, то при $x\geq 2$ уравнение корней не имеет.

Если $x<2$, то $3+2x-x^2=3$, $x=0$.

Следовательно, $a_{25}=0=a_{28}$ и, аналогичным образом, $a_{24}=-1$, $a_{23}=3$, $a_{22}=0$, то есть последовательность чисел a_1, a_2, ..., a_{29} периодична с периодом 3:

$$\ldots \to 0 \to 3 \to -1 \to 0 \to 3 \to -1 \to 0 = a_{28} \to 3 = a_{29}.$$

Поэтому

$$0=a_{28}=a_{25}=a_{22}=\ldots=a_{13}=a_{10} \text{ и } a_{11}=3.$$

Хотя не во всех решениях использованы графики, следует признать, что основным и первым шагом в решении всех приведенных версий выбранной конструкции задания С5 является именно исследование функции f и грамотно выполненный эскиз ее графика. Даже в тех случаях, когда график формально отсутствует, догадаться до решения (или хотя бы понять, «увидеть» его) весьма сложно, не имея перед собой правильной картинки.

Обсуждения

Различных мнений, суждений, возражений, позиций относительно заданий С5 каждый год набирается настолько много, что одними только дискуссиями вокруг них можно занять несколько журнальных публикаций. Попробую в стиле «вопрос – ответ» собрать те основные «недостатки» задания С5, которые мне довелось слышать (или читать) от коллег, выпускников, студентов и от московских экспертов, проверявших работы в июне этого года.

1. *Задача безумно сложна. Ее не в состоянии решить никто. По крайней мере, никто из нормальных учеников 11-го класса.*

Если под нормальным учеником имеется в виду «хорошист» из обычной школы, то приведенное утверждение верно. Причем верно оно **по определению** задания C5. Его решаемость (процент получивших за его выполнение 3 балла или 4 балла) не должна превышать 1–2%. Это есть необходимое условие, включаемое в техническое задание на разработку КИМ. Более того, насколько я могу судить, эта же верхняя оценка верна для одного (как правило, последнего) задания любого более-менее серьезного массового экзамена, направленного на проверку возможностей продолжения обучения математике в вузе.

2. *Да кому вообще нужно задание с решаемостью в 0,5%!?*

В июньской волне ЕГЭ по математике участвовало около 1 миллиона выпускников, и даже 0,5% от них — это уже около 5 тысяч человек, что с запасом перекрывает конкурсные потребности всех по настоящему профильных факультетов страны. Можно привести аргумент «от противного». Допустим, что C5 будет верно решать не 0,5%, а 5% выпускников. Это будет 50 тысяч абитуриентов, которые по результатам ЕГЭ будут почти не различимы. Кроме того, на мой взгляд, задание C5 всегда составляется таким образом, чтобы школьный отличник (настоящий, а не «нарисованный») достаточно спокойно мог получить 1 балл за C5. По критериям проверки на ЕГЭ-2008 для этого достаточным является построение графика функции f или же рассмотрение только «дробно-линейной части» функции вместе с обнаружением периодичности.

3. *Таких задач и вообще ничего подобного нет в школьных учебниках.*

Да, это верно. И так и должно быть, см. ответы на пп. 1 и 2. Вообще-то, это давно уже и не секрет, и не сюрприз: именно так всегда и было в 2001–2007 гг.

4. *Задача совсем не похожа на задачу из демоверсии. В таком случае, кому вообще нужна такая демоверсия?*

Если похожими называются задачи, в которых одни числа заменены другими, то, действительно, не похожа. Если посмотреть на используемые и проверяемые при решении умения, то тут практически полное совпадение: уравнения, заданные в функциональных терминах, исследование функций, нахождение или оценка множества значений функции. Свое мнение относительно ответа на вопрос «Кому нужна демоверсия?» я уже высказал в газете «Математика», № 16/2007, в статье именно с таким названием. Если кратко — **никому.** По крайней мере, ее опубликование в октябре – ноябре есть прямое вредительство по отношению к учебному процессу в школе.

5. *Это задача из высшей математики, тут нужно знать, что такое рекуррентные последовательности, итерации функций, и исследовать сложные функции вида $y = f(g(x))$. Этого нет в стандарте школьного математического образования.*

Второе утверждение — верно. Первое утверждение — неверно, см. выше список примеров и решений.

6. *Даже непонятно, с чего собственно следует начинать решение такой задачи.*

Если заниматься перебором и подбором известных из различных пособий алгоритмов и типов «абитуриентских» задач, то, пожалуй, да — непонятно. Если же задачу решать как таковую, по существу, то, по-моему, совершенно ясно, с чего надо начинать. С решения уравнения $f(x) = 0$, и значит, с исследования (графика) функции f. Образно говоря, дверь не обязательно открывать, натужно подбирая одну из многочисленных отмычек, которые громыхают на связке. Иногда отмычки полезны, но бывает и так, что достаточно просто потянуть дверь за ручку.

7. *В этом году и C3 было таким же (если, вообще, не более) убойным, как и C5.*

Согласен, но это уже — про C3, про всю Часть 3, про все C1—C5, про весь вариант и т.п.

8. *А Вы можете научить моего ребенка решать задания уровня C3–C5?*

Это вопрос мамы выпускника на одном из собраний в школе, на котором, в частности, происходила агитация насчет поступления в МГПУ. Ответ — «нет». Во-первых, так как потом выяснилось, что у ребенка годовая оценка по математике с трудом выкарабкивается на «4», и во-вторых, потому что собрание проходило в апреле.

9. *«Мне C5 оч понравился)) Оч красиво выглядел. Я только взглянула на него и махнула рукой)) Бесполезно. Это для гениев математики))»;*

*«Увидеть бы тех, кто это ЕГЭ составил. Ух, я бы с ними поговорил. Ну разве я не прав? На счет C3, C4, **C5** ... Для чего такие задания?»;*

*«Для чего все пишу? ДА потому, что реально было сделать все. Были бы мозги. И уровень C отнюдь не для ботанов, а для людей, кто знает хоть чуть-чуть **математику**».*

Это цитаты из высказываний учеников на разных форумах в Интернете. No comment.

Упражнения для самостоятельной работы

1. Функция f задана равенством

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3, & x\le 8,\\ \dfrac{x-675}{x+659}, & x>8.\end{cases}$$

Для некоторых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{39}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1, 2, \ldots, 38$. Найдите a_{16}, если известно, что $a_{38}=0$.

2. Функция f задана равенством

$$f(x)=\begin{cases} 3+2x-x^2, & x<2,\\ 0{,}5-12\cdot 2^{-x}, & x\ge 2.\end{cases}$$

Для некоторых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{29}$ из промежутка $[-1; +\infty)$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1, 2, \ldots, 28$. Найдите a_{12}, если известно, что $a_{28}=0$.

3. Функция f задана равенством

$$f(x)=\begin{cases} 3+2x-x^2, & x<2,\\ 0{,}5\left(1-|\,x-6\,|\right), & x\ge 2,\end{cases}$$

а для рациональных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{29}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1, 2, \ldots, 28$. Найдите a_{11}, если известно, что $a_{28}=0$.

4. Функция f задана равенством

$$f(x)=\begin{cases} 24+2x-x^2, & x<2,\\ 1-5\cdot 4^{24-x}, & x\ge 2.\end{cases}$$

Для некоторых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ из промежутка $[-4; +\infty)$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1, 2, \ldots, 30$. Найдите a_{11}, если известно, что $a_{30}=0$.

5. Функция f задана равенством

$$f(x)=\begin{cases} x^2+10x+24, & x\le 700,\\ \log_5\dfrac{5x-3360}{x}, & x>700.\end{cases}$$

Для некоторых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{34}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1, 2, \ldots, 33$. Докажите, что a_{14} четно, если известно, что $a_{33}=0$.

6. Пусть $a>1$ и функция f задана равенством

$$f(x)=\begin{cases} a(a+2)+2x-x^2, & x<2,\\ 1-(a+1)\cdot a^{a(a+2)-x}, & x\ge 2.\end{cases}$$

Для некоторых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ из промежутка $[-a; +\infty)$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1, 2, \ldots, k$. Найдите a_{k-19}, если известно, что $a_k=0$.

7. Пусть $a>2$ и для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{26}$ верны равенства $a_2=f(a_1)$, $a_3=f(a_2)$, $a_4=f(a_3)$, …, $a_{26}=f(a_{25})$. Найдите a_9+a_{10}, если известно, что $a_{25}=0$, а

$$f(x)=\begin{cases} |\,x+a\,|-1, & x\le 2a-3,\\ \dfrac{x\left(x-(2a-2)\right)}{x^2-(2a-3)(2a-4)}, & x>2a-3.\end{cases}$$

Ответы: **1.** 24. **2.** –1. **3.** 3. **4.** –4. **6.** $-a$. **7.** $2a-2$.

С. ДВОРЯНИНОВ,
г. Самара

Об одном забытом способе решения задач на совместную работу

Вышедшие в свет пособия [1], [2] несомненно привлекут внимание учителей и учащихся — этому способствуют рекламно-броские слова на обложках: «самое полное издание реальных заданий ЕГЭ» и «реальные задания». Сразу предупрежу потенциальных читателей — это две книги одних и тех же авторов, изданные в одном издательстве, в которых велика доля одинаковых задач.

В [2] дан разбор наиболее трудных заданий, отмечено, что задачи могут быть решены разными способами. При чтении одной из таких задач ([1], вариант 2) захотелось напомнить коллегам об одном нестандартном способе ее решения.

Задача 1. Отец с сыном должны вскопать огород. Производительность труда у отца в два раза больше, чем у сына. Работая вместе, они могут вскопать огород за 4 ч. Однако вместе они работали только один час, потом некоторое время работал один сын, а заканчивал работу уже один отец. Сколько часов в общей сложности проработал на огороде отец, если вся работа на огороде была выполнена за 7 ч?

Обычно решение такого рода задач записывают так.

Пусть отец может вскопать огород за x ч, а сын — за $2x$ ч, тогда за 1 ч отец вскапывает $\frac{1}{x}$ часть огорода, а сын $\frac{1}{2x}$ часть огорода. Так как за 4 ч совместной работы они вскопали весь огород, то верно равенство $\frac{4}{x}+\frac{4}{2x}=1$, откуда найдем, что $x = 6$.

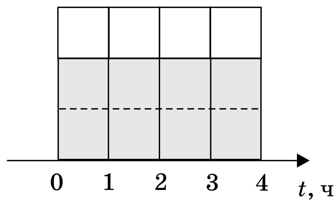
Пусть отец работал в одиночку T ч. Тогда сын работал в одиночку $7 - 1 - T = 6 - T$ (ч). Составим уравнение:

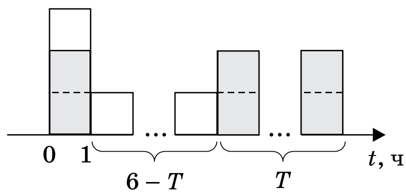
$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\cdot 1+\frac{1}{12}\cdot(6-T)=\frac{1}{6}\cdot T=1,$$

откуда найдем, что $T = 3$.

Итак, в общей сложности отец проработал на огороде $3 + 1 = 4$ (ч).

Рассмотрим еще один способ решения задачи, с помощью которого можно прийти к ответу гораздо быстрее. Условие задачи имеет графическую интерпретацию, которая, быть может, разнообразит арсенал способов ее решения:





Трактовка двух изображенных диаграмм очевидна. Белый квадрат изображает часть работы, выполняемую сыном за 1 ч, а закрашенный прямоугольник, составленный из двух таких же квадратов, изображает часть работы, выполняемую отцом за 1 ч.

Пусть отец работал в одиночку T часов, тогда сын работал в одиночку $7 - 1 - T = 6 - T$ (ч).

Составим уравнение

$$(1 + 2)\cdot 4 = (1 + 2)\cdot 1 + 1\cdot(6 - T) + 2\cdot T,$$

откуда находим, что $T = 3$. Вычислив сумму $1 + 3$, находим ответ на вопрос задачи — 4 ч.

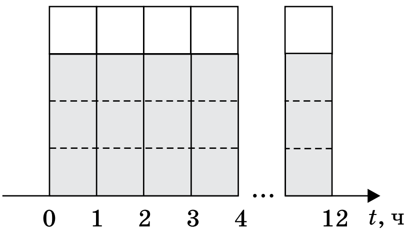
Рассмотрим аналогичную задачу ([1], вариант 1).

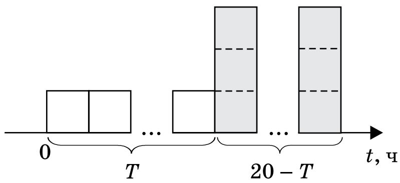
Задача 2. Два каменщика, работая вместе, могут выполнить задание за 12 ч. Производительности труда первого и второго каменщиков относятся как 1 : 3. Каменщики договорились работать поочередно. Сколько времени должен проработать первый каменщик, чтобы это задание было выполнено за 20 ч?

Решение. Пусть для выполнения всего задания первый каменщик должен проработать T часов. Тогда второй должен закончить работу за $(20 - T)$ ч. Составим уравнение

$$(1 + 3) \cdot 12 = 1 \cdot T + 3 \cdot (20 - T),$$

откуда находим ответ — 6 ч.



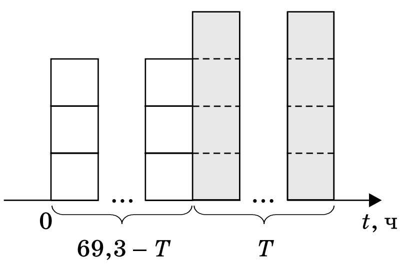


Кому-то из наших учеников обязательно понравится, что здесь при составлении уравнений мы обходимся целыми числами и не используем дроби для обозначения производительности труда. Разумеется, если в условии задачи дроби имеются, то они и в решении будут присутствовать.

Решение задачи 3 ([1], вариант 3) требует, по сравнению с двумя первыми задачами, выполнения еще одного действия.

Задача 3. Два плотника, работая вместе, могут выполнить задание за 36 ч. Производительности труда первого и второго плотников относятся как 3 : 4. Плотники договорились работать поочередно. Какую часть задания должен выполнить второй плотник, чтобы все задание было выполнено за 69,3 ч?

Решение. Пусть для выполнения всего задания второй плотник должен проработать T ч. Тогда первый должен закончить работу за $(69{,}3 - T)$ ч.



Составим уравнение

$$(3 + 4) \cdot 36 = 3 \cdot (69{,}3 - T) + 4 \cdot T,$$

откуда находим, что $T = 44{,}1$. Следовательно, искомая часть работы равна

$$\frac{4 \cdot 44{,}1}{7 \cdot 36} = \frac{1 \cdot 6{,}3}{1 \cdot 9} = 0{,}7.$$

Как обычно, после решения нескольких подобных задач некоторые ученики будут обходиться без реального вычерчивания вспомогательных диаграмм и будут составлять необходимые для решения задачи уравнения, лишь мысленно представляя эти диаграммы. Поступим так при решении двух следующих задач ([1], варианты 8 и 9).

Задача 4. Три насоса, работая вместе, заполняют цистерну нефтью за 5 часов. Производительности насосов относятся как 4 : 3 : 1. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 8 часов совместной работы второго и третьего насосов?

Решение. Объем цистерны равен

$$(4 + 3 + 1) \cdot 5 = 40 \text{ куб. ед.}$$

За 8 ч работы второй и третий насосы перекачают объем, равный

$$(3 + 1) \cdot 8 = 32 \text{ куб. ед.};$$

$$32 \text{ от } 40 \text{ составляет } \frac{32}{40} \cdot 100 = 80\%.$$

Ответ: 80%.

Задача 5. Бак заполняют керосином за 2 часа 30 минут с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 3 : 5 : 8. Сколько процентов объема будет заполнено за 1 ч 18 мин совместной работы второго и третьего насосов?

Решение. Объем цистерны равен

$$(3 + 5 + 8) \cdot 2{,}5 = 40 \text{ куб. ед.}$$

За $1\frac{18}{60}$ ч работы второй и третий насосы перекачают объем, равный

$$(5 + 8) \cdot 1\frac{18}{60} = 13 \cdot 1\frac{3}{10} = \frac{13 \cdot 13}{10} = \frac{169}{10} \text{ куб. ед.};$$

$$\left(\frac{169}{10} : 40\right) \cdot 100 = \frac{169}{4} = 42{,}25\%.$$

Ответ: 42,25%.

Литература

1. Самое полное издание реальных заданий ЕГЭ-2008: Математика/Сост. В.В. Кочагин, Е.М. Бойченко, Ю.А. Глазков и др. — М.: АСТ: Астрель, 2008.

2. Математика: ЕГЭ-2008: реальные задания/Сост. В.В. Кочагин, Е.М. Бойченко, Ю.А. Глазков и др. — М.: АСТ: Астрель, 2008.

А. ДОЛИНИНА,
г. Вологда

Скоро каникулы
Из опыта работы в профильном лагере

В нашей школе, как и во многих других школах, во время осенних каникул открывается школьный оздоровительный лагерь. Режим работы лагеря стандартный: 09.00 — завтрак; после него следуют четыре занятия, продолжительностью 40–45 мин. В 13.15 — обед. Потом свободное время и еще два занятия. В 15.30 — полдник. После него опять свободное время и индивидуальные консультации. Иногда вместо занятий проводятся конкурсы, походы в кино, экскурсии.

В 2006 г. мы организовали профильные отряды: математический — для пятиклассников, географический — для учеников 5–6-х классов и филологический — для старшеклассников.

Почему математический отряд был создан для пятиклассников?

Да потому, что в первой четверти больше внимания приходится уделять организации работы на уроке, учить пятиклассников четко выполнять требования учителя, а на дополнительную работу времени остается мало, да и дети раскрываются не сразу. Поэтому мы поставили перед собой несколько задач:

— за время работы лагеря привить ребятам интерес к математике;

— расширить их знания;

— поучить решать нестандартные задачи;

— начать подготовку ребят к обучению в профильном классе.

Так как ребята занимаются в лагере после учебной четверти, то нагрузка для них не должна быть непосильной, утомительной. Занятия по форме и содержанию должны отличаться от школьных уроков.

За смену можно провести 24 занятия. Мы взяли материал, который обычно используется на занятиях математического кружка, и составили следующий план:

Занятие	Содержание занятия	Пояснения
1	О математике — с улыбкой	Веселая викторина. Высказывания великих людей о математике
2	Из истории чисел: арабская и римская нумерация чисел и действия с ними	Д/з: Составить свою биографию, записывая даты римскими цифрами. Найти интересные сведения о записи чисел у разных народов
3–5	Двоичная система счисления. Перевод чисел из десятичной системы в двоичную и обратно. Действия над числами, записанными в двоичной системе	Д/з: Составить свою биографию, записывая даты в двоичной системе счисления. Решить примеры на вычисление
6	Другие системы счисления	Обзорно, при наличии времени
7	Графы. Применение графов к решению задач	
8	Таблицы истинности. Решение задач	
9–10	Решение задач с помощью графов и таблиц истинности	
11–13	Решение задач на взвешивание и переливание	
14–16	Решение задач конкурса «Кенгуру». Решение задач повышенной сложности	Подготовка к олимпиаде
17	Школьная олимпиада	Приглашаются все желающие
18	Подведение итогов олимпиады. Разбор заданий	
19	Игра «Полет на планету МиФ»	
20–23	Решение задач по всем разобранным темам	
24	Подведение итогов. Анкетирование	

Так как ребята в этом возрасте (5–6-й классы) очень подвижны, то мы увеличили перемены и старались проводить с ними больше подвижных игр, соревнований, викторин.

Игра «Найди клад»

Время проведения — 40 мин.

Цель игры: проверка вычислительных навыков; формирование навыков работы в команде.

Оборудование: 14 конвертов двух цветов с заданиями (по 7 каждой команде); две коробки с семью замками (внутри поощрительный приз — конфеты); «клад».

Две команды по 7 человек проходят по этапам, на которых выполняют задания, указанные в конвертах.

Конверты с заданиями заранее прикрепляются по предполагаемому пути движения команд, конверты спрятаны, чтобы их найти, надо быть очень внимательным.

Начало игры. Ученики собираются в кабинете. Ведущий сообщает, что в здании школы спрятан клад. Ученикам предлагается его найти. Для этого они разбиваются на две команды. Возможные варианты деления на команды:

1-я (2-я) команда

- День рождения участника является четным (нечетным) числом.
- Мальчики (девочки).
- По считалке.

После деления на команды ведущий поясняет, что клад получит та команда, которая выполнит задания первой. А для этого командам требуется:

— хорошо считать;

— быстро бегать;

— помогать друг другу;

— проявить смекалку и сообразительность;

— а главное — организовать работу в команде так, чтобы каждый мог принести пользу.

Раздаются листочки, ручки каждому участнику, так как им придется выполнять вычисления с многозначными числами.

Маршруты команд проложены так, чтобы их пути не пересекались и команды не мешали друг другу.

Конверт с первым заданием в руках у ведущего (каждой команде вручается свой конверт), и время пошло…

Во время выполнения заданий ребята перемещаются по разным этажам школы, а последний конверт возвращает ребят к тому кабинету, от которого они начинали свой путь.

Задания с решениями (для ведущего)

<table>
<tr><td>1-й конверт. Ищите задание у кабинета с номером, равным разности чисел CLXIII и CXXVI.
Ответ: $158 - 126 = 32$.</td><td>1-й конверт. Ищите задание у кабинета с номером, равным разности чисел LII и XLV.
Ответ: $52 - 45 = 7$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2-й конверт. Решите примеры из приведенного списка, вычеркните в ряду чисел полученные ответы. Оставшееся число укажет номер кабинета с 3-м конвертом.</td></tr>
<tr><td>1) $250 : 25 + 8 = 18$;
2) $7 \cdot 7 - 4 = 45$;
3) $(10 + 2) \cdot 12 = 144$;
4) $(16 - 9) \cdot 4 + (16 - 9) \cdot 6 = 70$;
5) $14 \cdot 15 - 5 \cdot 14 = 140$;
6) $480 : 24 + 16 \cdot 6 = 116$;
7) $18 \cdot 3 : 2 + 8 = 35$.

18, 45, $\underline{9}$, 35, 116, 144,140, 70.</td><td>1) $20 \cdot 26 - 14 = 506$;
2) $16 \cdot 4 + 12 = 76$;
3) $(28 - 11) \cdot 20 = 340$;
4) $240 : (19 - 11) = 30$;
5) $65 - 8 \cdot 8 = 1$;
6) $13 \cdot 15 + 7 \cdot 15 = 300$;
7) $(16 - 4) \cdot 10 + 20 = 140$.

30, 140, 300, 340, 76, $\underline{29}$, 506, 1.</td></tr>
<tr><td>3-й конверт. Решите примеры. Наименьшее из двузначных чисел, полученных в ответах, укажет номер кабинета, рядом с которым лежит 4-й конверт.
1) $(22 + 42) : 8 = 8$; 2) $40 - 6 \cdot 6 = 4$;
3) $18 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{26}$; 4) $5 \cdot 5 + 16 = 41$;
5) $18 \cdot 5 + 10 = 100$; 6) $(100 - 54) : 23 = 2$;
7) $(100 - 55) \cdot 2 = 90$.</td><td>3-й конверт. Решите примеры. Наименьшее из чисел укажет номер кабинета, рядом с которым лежит 4-й конверт.
1) $5 \cdot 5 \cdot 5 - 20 = 105$; 2) $(23 - 11) \cdot 11 = 132$;
3) $80 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16$; 4) $30 - 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{3}$;
5) $13 \cdot 13 - 9 = 160$; 6) $(33 + 61) : 2 = 47$;
7) $(100 - 13) : 3 = 29$.</td></tr>
<tr><td>4-й конверт. Следующий конверт рядом с кабинетом физики. (Внимательно смотрите по сторонам.)</td><td>4-й конверт. У спортивного зала вы найдете следующий конверт. (Внимательно смотрите под ноги.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">5-й конверт. Сколько лестниц вы прошли?</td></tr>
<tr><td>Полученное число умножьте на 2. Результат укажет номер кабинета со следующим заданием.
Ответ: $6 \cdot 2 = 12$.</td><td>К полученному числу прибавьте 1. Результат укажет номер следующего кабинета, где лежит задание.
Ответ: $6 + 1 = 7$.</td></tr>
</table>

6-й конверт. Найдите сумму ответов, и карточку с таким номером ищите в кабинете № 31:	
$8217 + 2138 \cdot (6906 - 6841) : 5 = 36\,011$; $(814 + 36 \cdot 27) : (101 - 2052 : 38) = 38$. *Ответ*: 36 011 + 38 = 36 049.	$(24 \cdot 7 - 377 : 29) \cdot 2378 : 58 = 6355$; $10\,351 - (12\,617 : 31 + 208 \cdot 43) = 1000$. *Ответ*: 6355 +1000 = 7355.
7-й конверт. В кабинете № 31 стоят коробки с «кладом», но на каждой из них по 7 замков. Замки мешают взять «клад». Каждый член команды решает по одному примеру, показывает ответ преподавателю и ищет замок с номером ответа, который он может снять. Команда, первая снявшая все замки, выигрывает и получает «клад».	
1) $(32 \cdot 15 - 250) : 46 + 123 \cdot 123 = 15\,134$; 2) $11\,815 : 85 - (4806 - 4715) = 48$; 3) $7866 : 38 + 16\,146 : 78 = 414$; 4) $101\,376 : 48 : 8 - 60 = 204$; 5) $8060 \cdot 45 - 45\,150 : 75 \cdot 105 = 299\,490$; 6) $(286\,208 : 86 + 16 \cdot 505) \cdot 10\,000 = 114\,080\,000$; 7) $14 \cdot (60 \cdot 60 \cdot 18 - 239\,200 : 46) = 834\,400$.	1) $(12\,322 : (24 + 37) + 12 \cdot 12) \cdot 254 = 87\,884$; 2) $(381 \cdot 15 \cdot 15 - 7248 : 24) \cdot 3 \cdot 3 = 768\,807$; 3) $5781 - 28 \cdot 75 : 25 + 13 \cdot 13 = 5866$; 4) $213\,213 : (403 \cdot 36 - 14\,469) = 5467$; 5) $(47\,040 : 98 + 1013 \cdot 24) : 8 = 3099$; 6) $532 \cdot 109 - 48\,016 + 13\,631 : 43 = 10\,289$; 7) $9936 : 48 + 6003 \cdot 43 - 504 \cdot 504 = 4320$.
Подведение итогов. Вручение призов.	

В свободное время ребята готовились к конкурсам между отрядами, получали индивидуальные консультации учителя по темам, рассматриваемым на занятиях в лагере, а также и на уроках (иногда даже поступали заявки от детей вернуться к некоторым темам). Если вопросов не было, то делали фигурки из бумаги (оригами), вырезали бордюры, создавали орнаменты. Задания брали из книги: *Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н.* Наглядная геометрия. Учебное пособие для V–IV классов. — М.; МИРОС, КПЦ «МАРТА», 1992. Также решали самостоятельно головоломки со спичками, играли в «Морской бой», «Крестики-нолики», «Колонии» и другие логические игры.

В последний день занятий ребята заполнили анкету:

1. Почему ты пошел в лагерь?
- **А.** Заставили родители.
- **Б.** Вместе с другом.
- **В.** Уговорил учитель.
- **Г.** Захотел сам.

2. Устраивает ли тебя режим работы лагеря?
А. Да. **Б.** Нет.

3. Что бы ты хотел изменить? ____________

4. Какие занятия (мероприятия) понравились?

5. Какие занятия (мероприятия) не понравились?

6. Твои пожелания по работе лагеря. ________

Проанализировав анкеты, мы узнали:

- что ребятам понравилось заниматься в профильных отрядах;
- нужно увеличить число профилей;
- добавить в план работы лагеря спортивные соревнования и соревнования между отрядами по общим областям знаний.

На следующий год работа лагеря была продолжена с учетом пожеланий ребят. Было увеличено число отрядов, а математический отряд был создан уже из учеников 6-х классов. Поскольку в отряде были дети, не посещавшие лагерь в прошлом году, то пришлось потратить больше времени на повторение и индивидуальные консультации, но в роли консультантов теперь могли выступать и ученики, хорошо усвоившие тему.

В дальнейшем такая форма работы будет продолжена уже по темам:

«Элементы логики или решение задач по геометрии» — 7-й класс;

«Статистика и теория вероятности» — 8-й класс.

Замечу, что тот же материал можно использовать и в рамках еженедельного математического кружка. Но после уроков дети приходят на занятия уже уставшими. Кроме того, количество уроков в расписании разное, и очень трудно определить время, удобное для всех желающих в параллели.

Удобна такая форма работы и при подготовке ребят к олимпиаде. Школьный тур олимпиады по математике проводится в начале ноября, и времени на подготовку не хватает. А планирование занятий в лагере составлено так, что в течение всей работы отряда дети учатся решать нестандартные задачи и есть время на решение олимпиадных задач и индивидуальную работу.

Шеф-редактор С. Островский
Главный редактор Л. Рослова
Ответственный секретарь Т. Черкавская
Редакторы П. Камаев, И. Бокова, В. Бусев
Корректор Л. Громова
Компьютерная верстка: С. Сухарев

Учредитель
ООО
«Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя:
ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (499)249 3138
Отдел рекламы: (499)249 9870
Редакция газеты «Математика»:
тел.: (499)249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW:http://mat.1september.ru